Ю.И.Хлопков

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЭРОДИНАМИКЕ

МОСКВА ООО «Азбука-2000»

2006

Работа поддержана РФФИ РАН. Грант № 04-07-90345, а также Государственной программой поддержки ведущих научных школ. Грант № 96-15-96063

УДК 533.6 ББК 22.253.3 Х58

Хлопков Ю.И.

X58 Статистическое моделирование в вычислительной аэродинамике. – М.: OOO «Азбука-2000», 2006. – 158 с. ISBN 5-7417-0131-0

В книге излагается обзор методов Монте-Карло, разработанных в вычислительной аэродинамике разреженного газа, и их применение в смежных, нетрадиционных для использования статистического моделирования, областях. Приводится краткая история развития методов, их основные свойства, достоинства и недостатки. Устанавливается связь прямого статистического моделирования аэродинамических процессов с решением кинетических уравнений и показывается, что современный этап развития вычислительных методов немыслим без комплексного подхода к разработке алгоритмов с учётом всех особенностей решаемой задачи: физической природы процесса, математической модели, теории вычислительной математики и стохастических процессов. Рассматриваются возможные пути развития методов статистического моделирования.

Для студентов, аспирантов и специалистов, интересующихся вопросами вычислительной аэродинамики.

УДК 533.6 ББК 22.253.3

ISBN 5-7417-0131-0

- © Хлопков Ю.А., 2006
- © Московский физико-технический институт (государственный университет), 2006
- © ООО «Азбука-2000», 2006

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава I. Основные уравнения и подходы к их решению	26
§ 1. Основные уравнения ДРГ	26
§ 2. Основные подходы к построению статистических	
методов	29
§ 3. Связь стационарного статистического	
моделирования и решения кинетического уравнения	30
§ 4. Построение метода прямого	
статистического моделирования	32
Глава II. Разработка численных методов решения	
линейных кинетических уравнений	34
§ 1. Совершенствование метода ВГК (Власова,	
Горелова, Когана)	34
§ 2. Модификация метода Власова для решения	
линейных задач	40
§ 3. Метод решения линеаризированного уравнения	
Больцмана	44
Глава III. Методы решения нелинейных задач динамики	
разреженных газов	49
§ 1. Метод решения модельного уравнения,	
основанный на стационарном моделировании	49
§2. Возможности схемы расщепления для решения	
кинетических уравнений	53
§ 3. Повышение скорости сходимости метода	
§ 4. Метод Белоцерковского—Яницкого	
Глава IV. Разработка методов расчета при малых числах	
Кнудсена	68
§ 1. Процедура метода Монте-Карло для	00
моделирования течений разреженного газа и	
сплошной среды	68
§ 2. Метод "релаксация – перенос" для решения задач	00
динамики газа в широком диапазоне разреженности	
среды	72
§ 3. Моделирование течений невязкого идеального	, 2
газа	78

Глава V. Исследования слабо возмущенных течений	
разреженного газа	84
§ 1. Определение скорости скольжения	84
§ 2. Решение задачи о слабом испарении	
(конденсации) с плоской поверхности	87
§ 3. Медленное движение сферы в разреженном газе	
(броуновское движение)	90
§ 4. Коэффициент диффузии и среднее смещение	
броуновской частицы в разреженном газе	92
Глава VI. Исследование обтекания различных тел	
в переходном режиме	96
§ 1. Обтекание плоских тел	
§ 2. Обтекание осесимметричных тел	
§ 3. Влияние испарения (конденсации) на	
аэродинамическое обтекание сферы при	
гиперзвуковом обтекании	108
Глава VII. Определение аэродинамических	
характеристик ВКС	113
§ 1. Методика описания поверхности	
§ 2. Методика расчета аэродинамических	
характеристик летательных аппаратов в условиях	
свободномолекулярного обтекания	118
§ 3. Инженерная методика расчета аэродинамических	
характеристик тел сложной формы в переходном	
режиме	119
Глава VIII. Невязкое обтекание затупленных тел	
с теплоподводом	122
§ 1. Основы метода	
§ 2. Описание алгоритма	
§ 3. Аппроксимационные свойства	
§ 4. Алгоритмы и сетки	
§ 5. Приложение метода прямого	
статистическогомоделирования невязких течений к	
обтеканию затупленных тел при наличии	
подвода энергии в потоке	135
Заключение	
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	

ВВЕДЕНИЕ

1. Общая схема методов Монте-Карло. Проявление методов статистического моделирования (Монте-Карло) в различных областях прикладной математики, как правило, связано с необходимостью решения качественно новых задач, возникающих из потребностей практики. Так было при создании атомного оружия, на первом этапе освоения космоса, при исследовании явлений атмосферной оптики, физической химии, моделировании турбулентности. В качестве одного из более-менее удачных определений методов Монте-Карло можно привести следующее:

Методы Монте-Карло — это численные методы решения математических задач (систем алгебраических, дифференциальных, интегральных уравнений) и прямое статистическое моделирование (физических, химических, биологических, экономических, социальных процессов) при помощи получения и преобразования случайных чисел.

Первая работа по использованию метода Монте-Карло была опубликована Холлом [1] в 1873 году именно при организации стохастического процесса экспериментального определения числа π путём бросания иглы на лист линованной бумаги. Яркий пример использования методов Монте-Карло – использование идеи Дж. фон Неймана при моделировании траекторий нейтронов в лаборатории Лос Аламоса в сороковых годах прошлого столетия. Хотя методы Монте-Карло связаны с большим количеством вычислений, отсутствие электронной вычислительной техники ни в том, ни в другом случае не смутило исследователей при применении этих методов, поскольку в том и другом случае речь шла о моделировании случайных процессов. И своё романтическое название они получили по имени столицы княжества Монако, знаменитой своими игорными домами, основу которых составляет рулетка – совершенный инструмент для получения случайных чисел. А первая работа, где этот вопрос излагался систематически, опубликована в 1949 году Метрополисом и Уламом [2], где метод Монте-Карло применялся для решения линейных интегральных уравнений, в котором явно угадывалось задача о прохождении нейтронов через вещество. В нашей стране работы по методам Монте-Карло стали активно публиковаться после Международной Женевской конференции по применению атомной энергии в мирных целях. Одной из первых можно привести работу *Владимирова и Соболя* [3].

Общая схема метода Монте-Карло основана на Центральной предельной теореме теории вероятности, утверждающей, что

случайная величина $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$, равная сумме большого количе-

ства N произвольных случайных величин X_i с одинаковыми математическими ожиданиями m и дисперсиями σ^2 , всегда распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $N\cdot m$ и дисперсией $N\cdot \sigma^2$. Предположим, что нам нужно найти решение какого-либо уравнения или результат какого-либо процесса I. Если сконструировать случайную величину ξ с плотностью вероятности p(x) таким образом, чтобы математическое ожидание этой величины равнялось искомому решению $M(\xi) = I$, то это даёт простой способ оценки решения и погрешности:

$$I = M(\xi) \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i \pm \frac{3\sigma}{\sqrt{N}}$$
.

Отсюда следуют общие свойства методов:

- абсолютная сходимость к решению, как $\frac{1}{N}$;
- *тяжёлая* зависимость погрешности \mathcal{E} от числа испытаний, как $\mathcal{E} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$ (для уменьшения погрешности на порядок, необходимо

увеличить количество испытаний на два порядка);

- основным методом уменьшения погрешности является максимальное уменьшение дисперсии, другими словами, максимальное приближение плотности вероятности p(x) случайной величины ξ к математической формулировке задачи или физике моделируемого явления;

- погрешность не реагирует на размерность задачи (в конечноразностных методах при переходе от одномерной задачи к трёхмерной количество вычислений увеличивается на два порядка, в то время как в методах Монте-Карло количество вычислений остаётся того же порядка);
- простая структура вычислительного алгоритма (N раз повторяющиеся однотипные вычисления реализаций случайной величины);
 - кроме того, конструкция случайной величины ξ , вообще говоря, может основываться на физической природе процесса и не требовать обязательной, как в регулярных методах, формулировки уравнения, что для современных проблем становится всё более актуальным.

Основные свойства методов Монте-Карло и условия, при которых они уступают и превосходят традиционные конечноразностные подходы, можно продемонстрировать на какой-нибудь простой задаче, например, на задаче о вычислении интеграла

$$I = \int_{a}^{b} f(x) dx,$$

где \mathbf{x} , \mathbf{a} и \mathbf{b} – векторы в n-мерном евклидовом пространстве. Случайную величину $\boldsymbol{\xi}$ с плотностью p(x) сконструируем таким образом, чтобы её математическое ожидание

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi \cdot p(x) dx$$

равнялось нашему интегралу І. Тогда если в соответствующих пределах выбрать $\xi = \frac{f(x)}{p(x)}$, то по центральной предельной теореме

$$I = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_i \pm \frac{3\sigma}{\sqrt{N}} \tag{1}$$

Итак, **первое**. Вычисление интеграла I можно трактовать как решение математически сформулированной задачи, с одной стороны, и прямое моделирование определения объёма, находящегося под функцией $f(\mathbf{x})$ с другой стороны.

Второе. Вычисление одномерного интеграла I_1 методом Монте-Карло соответствует вычислению I по методу прямоуголь-

ников с шагом $\Delta x \approx \frac{1}{N}$ и погрешностью $\mathrm{O}(\Delta x)$. В принципе, при достаточно хорошей функции f(x) в одномерном случае, не увеличивая существенно количество вычислений, интеграл I_1 можно вычислять с точностью $\mathrm{O}(\Delta x^2)$ по трапециям, с точностью $\mathrm{O}(\Delta x^3)$ по параболам и, вообще, с любой точностью. В многомерном случае трудности использования схем высокого порядка становятся настолько существенными, что при вычислении п-мерных интегралов I_n при $n \geq 3$ редко используются схемы высокого порядка.

Проведём соответствие между эффективностью регулярных и статистических методов. Пусть n – размерность задачи, Y – число узлов на оси, $R=Y^n$ – общее число узлов для регулярных методов, q – порядок точности схемы, N – число статистических испытаний, V – количество операций обработки одного узла, $\mathcal{E}_L = Y^{-q}$ – погрешность вычислений для регулярных методов, $\mathcal{E}_K = N^{-\frac{1}{2}}$ – погрешность вычислений для статистических мето-

дов, $L(\varepsilon) = v \cdot R = v \cdot \varepsilon^{-\frac{n}{q}}$ – количество операций при решении задачи регулярными методами, $K(\varepsilon) = v \cdot N = v \cdot \varepsilon^{-2}$ – количество операций по методу Монте-Карло. В случае одинакового количества операций при вычислении решения тем и другим методом с одинаковой точностью мы получаем соотношение n=2q.

Это означает, что при $n \ge 3$, где в основном используются схемы первого порядка, методы Монте-Карло становятся предпочтительней.

2. Особое место методы Монте-Карло занимают в вычислительной аэродинамике.

Динамика разреженных газов описывается известным интегродифференциальным кинетическим уравнением *Больцмана*

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \overline{\xi} \nabla f = \int (f' \cdot f_1' - f \cdot f_1) \cdot \overline{g} \cdot b \cdot db \cdot d\varepsilon \cdot d\overline{\xi}_1$$
 (2)

 $f-f(t,\,x,\,y,\,z,\,\xi_x,\,\xi_y,\,\xi_z)$ функция распределения молекул по времени, координатам и скоростям;

 f', f_1' – функции распределения, соответствующие скоростям молекул после столкновения ξ', ξ_1' ;

 \overline{g} - относительные скорости молекул при парных столкновениях $\vec{g}=\vec{\xi}-\vec{\xi}_1=\vec{\xi}'-\vec{\xi}_1'$;

 b, \mathcal{E} – прицельное расстояние и азимутальный угол при столкновениях частиц.

Сложная нелинейная структура интеграла столкновения и большое количество переменных (в общем случае — 7) создают существенные трудности для анализа, в том числе и численного и практически исключают конечно-разностный подход для серьёзных задач. И в то же время многомерность и вероятностная природа кинетических процессов создают естественные предпосылки для применения методов Монте-Карло. Исторически развитие численных статистических методов в динамике разреженных газов шло по следующим трем направлениям:

- использование методов Монте-Карло для вычисления интегралов столкновения в регулярных конечно-разностнных схемах решения кинетических уравнений;
- прямое статистическое моделирование физического явления, которое разделяется на два подхода: моделирование траекторий «пробных частиц» по *Хэвиленду* [4] и моделирование эволюции «ансамбля частиц» по *Бёрду* [5];
- построение случайного процесса типа процедуры *Уалама- Неймана*, описанной в [6], соответствующего решению линеаризованного кинетического уравнения [8], либо Master Equation *Каца* [7].

Вероятностная природа аэродинамики разреженных газов так важная для применения и разработки численных схем Монте-Карло естественным образом следует из общих принципов кинетической теории и статистической физики. Приведённые ниже рассуждения также вполне можно рассматривать и как уровни тщательности описания динамики большой молекулярной системы, которые в дальнейшем нам понадобятся для конструирования эффективных методов статистического моделирования.

Наиболее подробным уровнем описания является динамическая система. Для описания такой системы, состоящей из большого количества элементов N (а молекулярный газ и является такой системой с $N \approx 10^{23}$ молекул), необходимо задать начальные координаты и скорости каждой молекулы (\vec{r}_j, \vec{v}_j) и уравнения эволюции этой системы:

$$m\frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \sum_{i \neq j}^N R_{ij} \tag{3}$$

Решение подобной системы является совершенно нереальной задачей даже для очень разреженного газа— на высоте 400 км (наиболее популярные орбиты для спутников) в одном кубическом см содержится 10^9 молекул. Поэтому переходят к менее полному—статистическому—описанию поведения системы.

Следуя формализму Гиббса, рассматривают не одну систему, а ансамбль систем в 6N-мерном Г-пространстве, распределённых в соответствии с N-частичной функцией распределения $F(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_{N_1}, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N) = F_N$, имеющей смысл вероятности нахождения системы в момент времени t в точке $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N$ в окрестности $d\vec{r}_1...d\vec{r}_N d\vec{v}_1...d\vec{v}_N$

$$dW = F_N d\vec{r}_1 ... d\vec{r}_N d\vec{v}_1 ... d\vec{v}_N$$

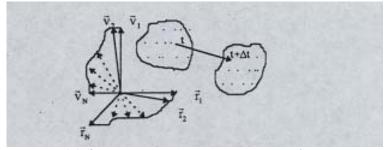


Рис. 1.1. Эволюция динамической системы в 6*N*-мерном пространстве

Подобный ансамбль описывается известным уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial F_N}{\partial r_i} + \sum_{i\neq j}^N \sum_{i=1}^N \frac{R_{ij}}{m} \frac{\partial F_N}{\partial v_i} = o$$
 (4)

И вот с этого момента уравнение *Лиувилля* и все последующие кинетические уравнения, следующие из цепочки *Боголюбова*, включая последнее её звено — уравнение *Больцмана*, имеют вероятностную природу. И хотя уравнение (4) проще системы (3), оно учитывает *N*-частичные столкновения молекул и также чрезвычайно сложно для практического анализа. Переход на менее детальный уровень описания связан с дальнейшим огрублением описания системы с помощью *s*-частичных функций распределения $F_s = \int F_N d\vec{r}_{s+1} ... d\vec{r}_N d\vec{v}_{s+1} ... d\vec{v}_N$, определяющих вероятность одновременного обнаружения s частиц независимо от состояния остальных *N-s* частиц.

Следуя идеям *Боголюбова*, получают цепочку зацепляющихся уравнений:

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s v_i \frac{\partial F_s}{\partial r_i} + \sum_{i=1}^s \sum_{j \neq i}^s \frac{R_{ij}}{m} \frac{\partial F_s}{\partial v_i} = -\sum_{i=1}^s (N - s) \frac{\partial}{\partial v_i} \int \frac{R_{i,s+1}}{m} F_{s+1} dr_{s+1} dv_{s+1}$$
 (5)

вплоть до одночастичной функции распределения $F_1 = f(t, \vec{r}, \vec{\xi})$ газа Больцмана с учётом лишь парных столкновений:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{R_{12}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{\xi}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \int \frac{R_{12}}{m} F_2 d\vec{r}_1 d\vec{\xi}_1.$$

Следуя *Больцману*, будем считать молекулы сферическисимметричными, и, принимая гипотезу молекулярного хаоса $F_2(t, \vec{r}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = F_1(t, \vec{r}, \vec{v}_1) F_1(t, \vec{r}, \vec{v}_2)$, приходим к уравнению (2).

Весьма интересным представляется частный случай уравнения *Лиувилля* (4) и цепочки *Боголюбова* (5) пространственнооднородного рассмотрения газа, состоящего из ограниченного числа частиц, который на конечном звене, соответствующего двухчаста

тичным столкновениям, приводит к известному уравнению *Каца* «*Master Equation*» [7]:

$$\frac{\partial \varphi_1(t, \vec{\xi}_1)}{\partial t} = \frac{N-1}{N} \int \left[\varphi_2(t, \vec{\xi}_1', \vec{\xi}_2') - \varphi_2(t, \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) \right] \cdot g_{12} d\sigma_{12} d\vec{\xi}_2, \tag{6}$$

где φ_1 и φ_2 – одно- и двухчастичные функции распределения. В отличие от уравнения *Больцмана*, уравнение (6) является линейным, что и будет использовано при при создании и обосновании эффективных численных схем прямого статистического моделирования

Возвращаясь к уравнению *Больцмана*, из определения функции f легко выводятся все макроскопические параметры. Так число молекул n в объеме единицы газа равно

$$n(t,x) = \int f(t,x,\xi) d\xi$$
.

Точно так же средняя скорость молекул, тензор напряжений и вектор потока энергии определяются отношениями:

$$u(t,x) = \frac{1}{n} \int \xi f(t,x,\xi) d\xi,$$

$$P_{ij} = m \int c_i c_j f(t,x,\xi) d\xi,$$

$$q_i = \frac{m}{2} \int c^2 c_i f(t,x,\xi) d\xi,$$

где $c = \xi - u$ – тепловая скорость молекул.

Средняя энергия теплового движения молекул обычно характеризуется температурой

$$\frac{3}{2}kT = \frac{1}{n} \int \frac{mc^2}{2} f(t, x, \xi) d\xi.$$

Применяя к уравнению Больцмана процедуру Энскога— Чепмена, получают гидродинамический уровень описания. Это уровень описания системой уравнений Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_{j} \frac{\partial}{\partial x_{j}}\right) u_{i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial^{2} i j}{\partial x_{j}} + \frac{X}{m},$$

$$\frac{3}{2} R \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_{j} \frac{\partial}{\partial x_{j}}\right) T = -\frac{\partial q_{j}}{\partial x_{j}} - P_{ij} \frac{\partial u_{j}}{\partial x_{j}},$$

$$P_{ij} = p_{ij} + \rho_{ij} p, p = \rho R T,$$

$$p_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_{i}}{\partial x_{j}} + \frac{\partial u_{j}}{\partial x_{i}} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_{r}}{\partial x_{r}}\right),$$

$$q_{i} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_{i}}$$
(7)

и уравнений Эйлера:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) u_i = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \cdot p,$$

$$\frac{3}{2} R \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) T = -p \cdot \operatorname{div} u$$
(8)

 $p = \rho RT$.

Следуя общей логике изложения, можно предположить, что и динамика сплошной среды как частный случай кинетического рассмотрения движения газа имеет черты статистической природы и допускает статистическое моделирование, что и будет показано ниже.

- 3. Краткий обзор существующих методов Монте-Карло в вычислительной аэродинамике. Большое научное и прикладное значение, которое в настоящее время имеет динамика разреженных газов (ДРГ), объясняется практической важностью решения широкого круга задач, связанных с современным этапом освоения космоса, развитием вакуумной технологии, лазерной техники и других отраслей научно-технического прогресса. Методы, развитые в динамике разреженных газов, широко применяются для решения задач, не связанных с разреженностью среды – теории гомогенных и гетерогенных процессов, теории испарений и адсорбционных процессов, неравновесных течений, обоснования и установления граничных условий и коэффициентов переноса в механике сплошных сред. Необходимость качественного и количественного анализа явлений динамики разреженных газов, сложность и многомерность уравнений, с которыми приходится иметь дело, стимулировали развитие эффективных и оригинальных численных методов. Особенности физических явлений, с которыми приходится иметь дело в ДРГ, и уравнений, описывающих эти явления (это в основном уравнения Больцмана и Навье-Стокса), накладывают на разрабатываемые методы целый ряд требований:
- обоснованность вычислительной процедуры и точность получаемого решения с возможностью его использования в качестве эталонного,
- возможность эффективного моделирования сложных течений разреженных газов, таких, как обтекание пространственных тел во всех диапазонах переходного режима от свободномолекулярного до сплошной среды, и учет физических и химических особенностей свойств газов.

В соответствии с основными требованиями существующие методы можно объединить в группы по степени их обоснованности и связи с кинетическими уравнениями и по возможности моделирования сложных явлений. К первой группе можно отнести в первую очередь регулярные методы - классические конечноразностные квадратурные подходы; полурегулярные методы - с использованием методов Монте-Карло для вычисления интегралов столкновения; и, наконец, статистические процедуры типа Улама—Неймана для решения кинетических уравнений. Во вторую группу можно выделить методы непосредственного статистического моделирования реальных течений. Необходимо отметить, что подобное

разделение методов в большой мере является условным, между многими из них установлена связь, и основным в классификации, на наш взгляд, является все-таки эффективность при решении сложных задач.

Краткую ретроспективу развития методов можно представить следующим образом. В монографии Когана [8] представлены основные вычислительные методы в динамике разреженных газов, разработанные до середины 60-х годов. Анализ более поздних методов приведен в обзорном докладе Белоцерковского [9], подробное описание основных подходов статистического моделирования представлено в сборнике и монографиях Бёрда и Белоцерковского [10, 11, 12]. Описание регулярных и полурегулярных методов дано у Рыжова [13].

Как уже отмечалось, по степени обоснованности вычислительной процедуры в первую очередь следует упомянуть регулярные методы. В общем их суть заключается в аппроксимации функции распределения значениями в точках фазового пространства и дальнейшего решения разностных уравнений. Кроме естественного требования к умению хранить и оперировать с большим объемом информации, существенные трудности вызывает разностная аппроксимация интегралов столкновений. Поэтому в ряде случаев естественным этапом развития методов явилось использование процедур Монте-Карло при вычислении интегралов столкновений. Для уравнения Больцмана этими методами был получен ряд эталонных решений в основном для пространственно-однородных и одномерных течений, например, Эндер М.А., Эндер А.Я., Черемисин Ф.Г. [14, 15] и двумерных задач, Черемисин, Щербак [16,17]. Возможности методов существенно расширяются при решении модельных кинетических уравнений (Крук, Халвей, Шахов, Ларина, Рыков, Лимар, Ниапд [18-26]). Замена интеграла столкновений некоторым упрощенным выражением во многих случаях позволяет построить вычислительную процедуру интеграла столкновений на уровне макропараметров, что значительно увеличивает эффективность применяемых методов (Крук, Халвей, Шахов [18,19,20]).

Сложная многомерная структура кинетических уравнений, с одной стороны, и избыток информации, которую несет в себе функция распределения, с другой, стимулировали применение и развитие статистических процедур для решения задач динамики разреженных газов. Первое применение статистических методов

связывалось с непосредственным моделированием течений газов (Haviland, Bird [27–32]). Сразу отразим, что методы прямого статистического моделирования оказались наиболее эффективными в динамике разреженных газов. Кроме упомянутых выше причин, это объясняется еще и статистической природой кинетических уравнений. Среди методов прямого статистического моделирования можно выделить два подхода: метод стационарного прямого статистического моделирования Haviland [27–29] и метод нестационарного прямого статистического моделирования Bird [30–32]. Поскольку данная работа в основном посвящена статистическим методам, опишем кратко суть упомянутых подходов.

И в том и в другом методе в области течения выбирается некоторый объем, на границах которого обычным способом задается вид функции распределения и закон взаимодействия газа с поверхностью. Расчетная область разбивается на ячейки, в каждой из которых функция распределения моделируется некоторым количеством частиц. Размеры ячеек выбираются из условия постоянства функции распределения по объему ячейки. Эволюция частиц разделяется во времени на малые промежутки длительности Δt , выбираемые из условия $\overline{\xi}\Delta t << \overline{\lambda}$, где $\overline{\xi}$ и $\overline{\lambda}$ – характерные скорость и длина свободного пробега молекул. Основное отличие рассматриваемых процедур заключается в том, что в случае нестационарного моделирования осуществляется одновременное слежение за всем ансамблем частиц. Это позволяет строить траектории частиц с учетом меняющейся во времени частоты столкновений – и приводит к некоторому процессу установления. В случае стационарного моделирования слежение осуществляется за отдельными так называемыми пробными частицами, что приводит к необходимости знания функции распределения полевых частиц и, соответственно, к некоторому итерационному процессу. И тот и другой подходы допускают ряд принципиальных модификаций, существенно повышающих их эффективность и позволяющих их успешное использование не только в одномерных случаях, но и для решения двухмерных и даже трехмерных задач.

Непосредственное моделирование течений газа, вообще говоря, является универсальным инструментом исследования не только в области разреженного газа, но и, как показывается в настоящей работе, в механике сплошных сред. Однако одно из досто-

инств прямого моделирования - решение задач без обращения к уравнению – часто является и основным недостатком метода. Отсутствие прямой связи с описывающим процесс уравнением вызывает известное недоверие к получаемым результатам и затрудняет систематический подход к повышению эффективности методов. По этой причине известный методологический и практический интерес представляют работы по обоснованию и установлению соответствия статистических процедур управляющему уравнению. Известная статистическая процедура Улама-Неймана для решения интегральных уравнений и широко применяемая в теории излучений (Марчук, Ермаков, Михайлов, Соболь [33–35]) для кинетических уравнений непосредственно применима лишь в случае линеаризованного кинетического уравнения (Хлопков [36]). В нелинейном случае (Ермаков, Нефёдов [37, 38]) была предложена модификация процедуры Улама-Неймана, основанная на теории ветвящихся процессов. Однако практическая реализация этого метода, связанная с большим количеством вычислений, оказалась затруднительной. Построение же стандартной процедуры Улама-Неймана для нелинейного уравнения требует искусственной линеаризации уравнения, что приводит к итеративному процессу, запоминанию информации о предыдущей итерации и соответственно разбиения фазового пространства на ячейки, что является дополнительным источником погрешности и не является необходимым в методах (Хлопков, Иванов, Григорьев [39, 40]). Построенная таким образом процедура соответствует методу стационарного статистического моделирования, что было использовано при составлении и обосновании методов (Хлопков, Иванов [39, 40]).

Несколько сложнее обстоит дело с обоснованием метода нестационарного моделирования. Установление его связи с решением кинетических уравнений посвящены работы (Белоцерковский, Яницкий [12]). В практической реализации все-таки предпочтение отдается методам прямого статистического моделирования. Именно ими были решены большинство наиболее сложных и практически важных задач.

Модернизация методов стационарного статистического моделирования в основном шла по пути сокращения оперативной памяти вычислительной машины. Так, в работах *Власова* [41, 42] предлагается процедура построения траекторий, не требующая запоминания функции распределения, основанная на том, что плот-

ность вероятности скорости полевой молекулы равна нормированной на единицу искомой функции распределения. Другим направлением повышения эффективности методов является аппроксимация функции распределения полевых частиц с помощью некоторого количества моментов. Большие возможности по совершенствованию методов стационарного моделирования открывает использование модельных кинетических уравнений *Хлопков, Иванов* [39, 40]. В этом случае реализация процедуры столкновений не требует знания функции распределения полевых частиц, поскольку пробная частица после столкновения приобретает скорость, соответствующую равновесной функции распределения.

Центральным местом в методе нестационарного статистического моделирования является процедура подсчета столкновений. Пара частиц выбирается для столкновения в соответствии с частотой столкновений молекул вне зависимости от расстояния между ними в данной ячейке. Скорости частиц после столкновения выбираются в соответствии с законами взаимодействия молекул. Хотя эффективность метода зависит от довольно многих параметров схемы счета (установления, расщепления по времени, выхода на стационарный режим, шага по времени, сетки по пространству и т.д.), основные работы по совершенствованию метода посвящены улучшению процедуры столкновений и уменьшению статистической погрешности схемы как основного момента, позволяющего уменьшить количество частиц в ячейках и соответственно уменьшить оперативную память вычислительной машины. Так, в работе Ерофеева, Перепухова [43] была предложена модификация процедуры столкновений для максвелловских молекул, при которой результаты расчета практически не зависят от количества частиц в ячейке при их изменении от 40 до 6. (При обычных расчетах количество частиц в ячейках порядка 30.) В работах Белоцерковского, Яницкого [44-49) предложен метод, в котором на этапе столкновений подсистема модельных частиц в каждой ячейке рассматривается как *N*-частичная модель Каца. Моделирование столкновения сводится к статистической реализации эволюции модели Каца в течение времени Δt . Время столкновения в модели Каца рассчитывается в соответствии со статистикой столкновения в идеальном газе. Эта схема позволяет использовать существенно меньшее число частиц в ячейке и более мелкий шаг расчетной сетки. Анализ результатов расчета показал, что результаты расчета практически не зависят от количества частиц в ячейке вплоть до 2.

Как уже отмечалось, в практической реализации для задач динамики разреженных газов статистические методы оказались более эффективными по сравнению с регулярными и полурегулярными методами. Для задач обтекания, как наиболее существенных в аэродинамике, они впервые были успешно применены Перепуховым [51, 52] для получения аэродинамических характеристик различных, в том числе и сложных тел в свободномолекулярном и близком к свободномолекулярному потоках. Разработанная более двух десятков лет назад методика в настоящее время доведена до стандартных программ и широко используется в соответствующих проектных и конструкторских организациях. Продвижение в область меньших Кп связано с резким увеличением вычислительных трудностей, обусловленных уменьшением длины пробега молекул и соответственно более мелким шагом по времени и пространству, и в случае прямого моделирования увеличением количества частиц, моделирующих функцию распределения. В этом направлении с помощью статистических методов, основанных на стационарном и нестационарном подходах, в задачах обтекания удалось продвинуться до чисел *Кп* порядка 0,001 в плоском, осесимметричном (Хлопков, Ерофеев, Перепухов, Иванов, Власов, Горелов [39, 40, 53– 69] и также в пространственном случаях (Ерофеев, Кравчук, Серов, Хлопков, Иванов, [70–76, 100]).

По всей видимости, применение статистического моделирования в традиционной форме для проникновения в область сплошной среды при современной вычислительной базе неэффективно. И поскольку современный этап развития аэрокосмической техники все-таки требует получения данных во всей области переходного режима, то течения слабо разреженного газа требуют разработки соответствующих методов и способов решения. Представляют интерес методы, использующие информацию о функции распределения, исходя из физических соображений, связанных со сплошностью среды. Одно из таких направлений — решение более высоких по порядку, чем уравнений Эйлера и Навье—Стокса моментных уравнений. Однако до сих пор остается открытым вопрос, окупается ли получаемым уточнением значительное усложнение соответствующих макроскопических уравнений и трудности поставки для них граничных условий.

Другое направление связано с совместным решением на последовательных элементарных участках времени кинетического и сплошносредных уравнений, взаимно дополняя и уточняя друг друга. Однако на этом направлении к трудностям решения кинетических уравнений в полной мере добавляются трудности решения уравнений Навье—Стокса, чем объясняется применение метода лишь для одномерных задач.

Более эффективным представляется выделение в течении областей с различными физическими свойствами, описываемыми разными типами уравнений, решения которых сращиваются на границах областей. Такой прием широко применяется в механике сплошных сред Сычёв [50], а в вычислительной газодинамике разреженного газа пока еще широкого распространения не получил и представляется единичными работами типа Хлопков [70].

Также чрезвычайно интересным и требующим, на наш взгляд, своего дальнейшего развития является направление применения вычислительных приемов, развитых в динамике разреженных газов, в таких нетрадиционных областях применения, как вязкие и невязкие течения сплошной среды. В частности, это позволяет установить единую вычислительную процедуру независимо от разреженности среды. В этой связи представляют интерес методы, моделирующие сплошную среду ансамблем частиц (Белоцерковский, Harlow, Хлопков, Кравчук, [12, 70, 71, 74, 77, 79-82]), наделенных соответствующими признаками, совокупность которых характеризует рассматриваемую среду. Так, в методах (Нагlow, Gentry, Белоцерковский, [12, 79, 80]) частицы представляют лагранжеву форму описания течения идеального газа, а в работах (Pullin, Хлопков, Кравчук, [74, 81]) сплошная среда моделируется молекулярной функцией распределения. Использование статистического подхода при описании сплошной среды с помощью ансамбля частиц, позволяет, вообще говоря, использовать опыт, накопленный в вычислительной газодинамике разреженного газа, с одной стороны, и установить единую процедуру расчета во всех режимах течений, с другой – (Коган, Хлопков, [82, 83]).

И, наконец, нельзя не отметить практически важное направление развития расчетных методов, основанных на гипотезе локальности (*Баранцев*, *Галкин*, *Ерофеев*, *Толстых*, *Бунимович*, *Басс*, *Хлопков*, [84–96]).

Это приближенные полуэмпирические методы, позволяющие эффективно получать интегральные аэродинамические характеристики аппаратов на всех режимах течения.

4. Построение эффективных методов статистического моделирования.

Центральное место в динамике разреженных газов, безусловно, занимают методы прямого статистического моделирования и работы по конструированию статистических процедур при прямом моделировании, которые открыли широкие возможности по повышению эффективности методов, снижая буквально на порядки быстродействие и объем оперативной памяти ЭВМ по сравнению с первоначальными модификациями, что позволило их применять к решению двухмерных и впоследствии, с учетом реальных свойств газов, трехмерных задач. Однако при исследовании и обосновании применения этих методов фактически невозможно обойтись без рассмотрения описывающего моделируемое явление кинетического уравнения. Установление связи статистической процедуры с решением кинетического уравнения является необходимым по целому ряду причин. Во-первых, для того чтобы доверять решению и использовать полученные результаты в качестве эталонных, поскольку решения многих характерных задач были впервые решены именно методами прямого моделирования и до сих пор не повторены другими методами. Во-вторых, установление соответствия моделирования решению уравнения позволяет использовать хорошо развитый аппарат численных регулярных и статистических методов решения уравнений математической физики для анализа и повышения эффективности методов. И, в-третьих, это позволяет установить некоторый общий подход к построению методов и исключает всякого рода ложные модификации.

Следует подчеркнуть, что сложность практических задач высотной гиперзвуковой аэродинамики для разработки эффективных численных алгоритмов с необходимостью требует привлечения всего арсенала теоретических, экспериментальных, численных методик исследования течений разреженного газа. В этой связи особую значимость преобретает анализ кинетического уравнения и исследование его различных моделей. Часто пользуются приближенными представлениями интеграла столкновений и функции распределения. Наиболее распространенными приближенными формами кинетических уравнений являются:

- модельное уравнение Крука [18]:

$$\frac{df}{dt} = v(f_0 - f) \quad , \tag{9}$$

где v – частота столкновений, $f_0 = n(\frac{m}{2\pi \ kT})^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(\overline{\xi}-\overline{v})^2}$ –

равновесная функция распределения;

– эллипсоидальная модель Халвея [19]

$$\frac{df}{dt} = v(f_3 - f) \tag{10}$$

 f_{2} — эллипсоидальная функция распределения;

– аппроксимационная модель *Шахова* [20], которая в отличие от предыдущих моделей даёт правильное число Прантля **Pr**:

$$\frac{df}{dt} = v(f^{+} - f),$$

$$f^{+} = f_{0} \left[1 + \frac{4}{5} (1 - \Pr) s_{\alpha} c_{\alpha} (c^{2} - \frac{5}{2}) \right], s_{i} = \frac{1}{n} \int c_{i} c^{2} f d\overline{\xi}, \quad (11)$$

с – безразмерная молекулярная тепловая скорость.

Здесь же необходимо упомянуть линеаризированное уравнение Больцмана, которое строго выводится из полного уравнения Больцмана при условии, что функция распределения слабо отличается от равновесной (*Коган* [8]):

$$\frac{d\varphi}{dt} = k(\overline{\xi})\varphi + \int L(\overline{\xi}, \overline{\xi_1})\varphi_1 d\overline{\xi_1}, \qquad (12)$$

где $f=f_0(1+\varphi),\ \varphi<<1;\ k(\overline{\xi})$ и $L(\overline{\xi},\overline{\xi_1})$ – некоторые известные функции молекулярных скоростей, зависящие от сорта частиц.

Модельные уравнения в отличие от линеаризованного не следуют строго из уравнения Больцмана, кроме того, являются существенно более нелинейными, чем исходное уравнение, но в практической реализации при численном моделировании могут оказаться проще. В практической реализации методы прямого статистического моделирования, основанные на подходах

Бёрда и Хэвиленда, естественно, оказались наиболее эффективными и их модификации с переменным успехом осуществляли победное шествие по вычислительной аэродинамике.

К настоящему времени безусловный приоритет в динамике разреженного газа принадлежит методу Бёрда, модификации которого трудами отечественных исследователей O. Белоцерковского, B. Яницкого, M. Иванова, B. Перепухова, A. Ерофеева [12, 10–20] позволили буквально на порядки повысить эффективность метода. Суть метода заключается в том, что эволюция системы на малом промежутке времени Δt расщепляется на два ясных физических процесса:

1) релаксацию в соответствии с оператором столкновений в кинетическом уравнении

$$\frac{\partial f}{\partial t} = J(f)$$
,

2) свободномолекулярный перенос

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{\xi} \nabla f .$$

Это хорошо известная схема расщепления первого порядка по Δt для любого операторного уравнения, но в данном случае она подкупает тем, что расщепляет динамику такой сложной кинетической системы на два ясных физических процесса. Функция распределения моделируется N частицами, которые на первом этапе в каждой ячейке между собой сталкиваются в соответствии с частотой столкновения на протяжении времени Δt , а на втором, в течение Δt , перелетают на расстояния $\vec{\xi}_j \Delta t$.

Центральным местом в методе нестационарного статистического моделирования является процедура подсчета столкновений. Пара частиц выбирается для столкновения в соответствии с частотой столкновений молекул вне зависимости от расстояния между ними в данной ячейке. Скорости частиц после столкновения выбираются в соответствии с законами взаимодействия молекул. Хотя эффективность метода зависит от довольно многих параметров схемы счета (установления, расщепления по времени, выхода на стационарный режим, шага по времени, сетки по пространству и т.д.), основные работы по совершенствованию метода посвящены улучшению процедуры столкновений и уменьшению статистической

погрешности схемы, как основного момента, позволяющего уменьшить количество частиц в ячейках и, соответственно, уменьшить оперативную память вычислительной машины и уменьшить время расчёта. Так, в работе [18] была предложена модификация процедуры столкновений для одного частного случая — максвелловских молекул, при которой результаты расчета практически не зависят от количества частиц в ячейке при их изменении от 40 до 6. (При обычных расчетах количество частиц в ячейках порядка 30). В работах [11–16] предложен общий метод, независящий от сорта молекул, в котором на этапе столкновений подсистема частиц в каждой ячейке рассматривается как *N*-частичная модель Каца (6):

$$\frac{\partial \varphi_{1}(t, \vec{\xi}_{1})}{\partial t} = \frac{N-1}{N} \int \left[\varphi_{2}(t, \vec{\xi}_{1}', \vec{\xi}_{2}') - \varphi_{2}(t, \vec{\xi}_{1}, \vec{\xi}_{2}) \right] \cdot g_{12} d\sigma_{12} d\vec{\xi}_{2}.$$

Моделирование столкновения сводится к статистической реализации эволюции не уравнения Больцмана (2), а модели Каца (6) в течение времени Δ t. Время столкновения в модели Каца рассчитывается в соответствии со статистикой столкновения в идеальном газе по схеме Бенулли. Эта схема позволяет использовать существенно меньшее число частиц в ячейке и более мелкий шаг расчетной сетки. Анализ результатов показал, что результаты расчета практически не зависят от количества частиц в ячейке вплоть до 2. Дело в том, что уравнение Больцмана с необходимостью требует предположения о молекулярном хаосе, которое при том количестве частиц в ячейке, на которое способны современные компьютеры, выполняется с систематической ошибкой, уравнение (6) этого не требует и поэтому этап столкновения рассчитывается как чисто марковский процесс. А с другой стороны, при $N \to \infty$ имеет место полная эквивалентность модели Каца и пространственнооднородного уравнения Больцмана. Таким образом, разработанный Белоцерковским – Яницким подход:

- 1) даёт путь построения эффективных численных схем, обеспечивающих возможность решения трёхмерных задач аэродинамического обтекания;
- 2) решает важнейшую методологическую задачу эквивалентности численного метода решению кинетического уравнения.

Методам традиционного использования статистического моделирования посвящено огромное количество работ, поэтому мы ограничимся в основном задачам аэродинамики. Как уже отмечалось, в практической реализации для задач динамики разреженных газов статистические методы оказались более эффективными по сравнению с регулярными и полурегулярными методами. Для задач обтекания, как наиболее существенных в аэродинамике, они впервые были успешно применены для получения аэродинамических характеристик различных, в том числе и сложных тел в свободномолекулярном и близком к свободномолекулярному потоках. Разработанная более двух десятков лет назад методика в настоящее время доведена до стандартных программ и широко используется в соответствующих проектных и конструкторских организациях. Продвижение в область меньших Кп связано с резким увеличением вычислительных трудностей, обусловленных уменьшением длины пробега молекул и соответственно более мелким шагом по времени и пространству и в случае прямого моделирования увеличением количества частиц, моделирующих функцию распределения.

Как уже отмечалось, к настоящему времени несомненный приоритет во всём мире имеют современные методы, основанные на подходе Бёрда, моделирования динамики «ансамбля молекул». Но так было не всегда. Одно время приоритет имели методы статистического моделирования «пробных частиц», основанные на подходе Хэвиленда. Возможно, в будущем появятся его эффективные схемы, как это уже было раньше, когда ещё не было тех эффективных схем подхода Бёрда, о которых речь шла выше. Или новый класс задач, для которых эти схемы станут приоритетными. Но уже сейчас можно выделить некоторые проблемы физической химии, для которых метод пробных частиц оказывается предпочтительнее. Но и, конечно, это класс линейных задач, с которых он, собственно, и начинался [2]. Есть ещё одно явное преимущество этого метода, которое состоит в том, что для него, в отличие от метода Бёрда, так остро проблема соответствия решению кинетического уравнения не стоит. Что касается вычислительной аэродинамики, то он основан на линеаризованном уравнении Больцмана (12).

глава І

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПОДХОДЫ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

§ I. Основные уравнения ДРГ

Динамика разреженных газов описывается известным интегродифференциальным кинетическим уравнением Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \overline{\xi} \frac{df}{dx} = \int (ff_1' - ff_1) \overline{g} b db d\varepsilon d\overline{\xi}_1, \qquad (1.1.1)$$

где

f – функция распределения молекул по скоростям $\overline{\xi}$,

 \overline{g} – относительные скорости молекул при парных столкновениях,

 b, ε – прицельное расстояние и азимутальные угол при столкновениях частии.

Сложная нелинейная структура интеграла столкновения и большое количество переменных (в общем случае – 7) создают существенные трудности для анализа, в том числе и численного, этого уравнения, поэтому часто пользуются приближенными представлениями интеграла столкновений и функции распределения. Наиболее распространенными приближенными формами кинетических уравнений являются:

- модельное уравнение Крука [18]:

$$\frac{df}{dt} = v(f_0 - f) \quad , \qquad f_0 = n(\frac{m}{2\pi \ kT})^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(\bar{\xi} - \bar{v})^2} \quad (1.1.2)$$

где v – частота столкновений, f_0 – равновесная функция распределения

- эллипсоидальная модель Халвея [19]:

$$\frac{df}{dt} = v(f_9 - f), \tag{1.1.3}$$

 $f_{_9}$ – эллипсоидальная функция распределения;

- аппроксиомационная модель Шахова [20]:

$$\frac{df}{dt} = v(f^{+} - f), \quad f^{+} = f_{0} \left[1 + \frac{4}{5} (1 - \Pr) s_{\alpha} c_{\alpha} (c^{2} - \frac{5}{2}) \right],$$

$$s_{i} = \frac{1}{n} \int c_{i} c^{2} f d\overline{\xi}$$
(1.1.4)

c и \Pr – безразмерная молекулярная тепловая скорость и число Прантля соответственно.

Здесь же необходимо упомянуть линеаризированное уравнение Больцмана, которое строго выводится из полного уравнения Больцмана при условии, что функция распределения слабо отличается от равновесной [8]:

$$\frac{d\varphi}{dt} = k(\overline{\xi})\varphi + \int K(\overline{\xi}, \overline{\xi_1})\varphi_1 d\overline{\xi_1}, \qquad (1.1.5)$$

где $f=f_0(1+\varphi), \ \varphi<<1, \ K(\overline{\xi})$ и $K(\overline{\xi},\overline{\xi}_1)$ и некоторые известные функции молекулярных скоростей, зависящие от сорта частиц.

Уравнения (1.1.2–1.1.4) в отличие от (1.1.5) не следуют строго из уравнения Больцмана, кроме того, являются существенно более нелинейными, чем исходное уравнение, но, как мы увидим ниже, в практической реализации при численном моделировании могут оказаться проще.

[66] подробно рассматривается общая методика построения кинетических моделей и их роль в исследовании течений разреженного газа. Принципиальная схема метода, который можно рассматривать как метод аппроксимации уравнения Больцмана (1.1.1), заключается в том, что интеграл столкновений J заменяется некоторым более простым оператором Q, ограничивающим лишь итерационные свойства больцмановского. В частности, выставляется требование, чтобы для любой заданной функции распределенные первые моменты аппроксимирующего и истинного операторов столкновения, вплоть до некоторого порядка, совпадает. Предполагается, что приближенный оператор зависит от функции распределения, молекулярной скорости, а также от системы макропараметров соответствующего порядка. Таким образом, возникает система уравнений для определения этих макропараметров $a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$:

$$\int J(f)\Psi d\overline{\xi} = \int Q(f, \overline{\xi}, a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(n)})\Psi d\overline{\xi}, \qquad (1.1.6)$$
где $\Psi = 1, \, \xi_i, \, \xi_i \xi_i, \dots, \xi_1^{\alpha_1}, \xi_2^{\alpha_2}, \xi_3^{\alpha_3}, \dots$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = m, \qquad m = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Свойство *n*-го приближения состоит в том, что полученные из него уравнения моментов, вплоть до *n*-го порядка, в точности совпадают с точными уравнениями моментов, следующими из уравнения Больцмана. Интегралы соотношения (1.1.6) есть не что иное, как расширение обычных требований о выполнении законов сохранения.

Приближенный оператор столкновений задается в релаксационной форме:

$$Q = v(f^+ - f) (1.1.7)$$

а для f^+ используется локально-максвелловская документация, умноженная на соответствующий полином

$$f^{+} = f_{0}(a^{(0)} + a_{\alpha}^{(1)}c_{\alpha} + a_{\alpha\beta}^{(2)}c_{\alpha}c_{\beta} + \dots)$$
(1.1.8)

Таким образом, ограничивая соответствующее количество моментов в (1.1.8), можно получить последовательно оператор (1.1.7) в форме (1.1.2), (1.1.3) и (1.1.4) соответственно или построить модельное уравнение более высокого приближения.

Естественно, любое упрощение исходного уравнения приводит к тем или иным отходам от истинного решения, которые для различных областей могут быть существенным или нет. Так, хотя уравнение (1.1.2) обладает основными свойствами уравнения Больцмана: в частности, из него следует закон сохранения и Нточно переходит в уравнение Больцмана теорема, ОНО свободномолекулярном и сплошносредном невязком пределах. Однако при переходе к сплошной среде модель Крука дает неверное значение числа Прандтля. Модели (1.1.3) и (1.1.4) этого недостатка лишены, но в то же время конструируемые модели кинетических по-прежнему остаются достаточно сложными практически недоступными для аналитического анализа. Поэтому основным критерием выбора той или иной модели при исследовании характерных задач является сравнение численных результатов, чему в основном и посвящена работа (Шахов, Хлопков, [66]).

§ 2. Основные подходы к построению статистических методов

Обычно считают, что развитие численных статистических методов в динамике разреженных газов идет по следующим трем направлениям:

- использование методов Монте-Карло для вычисления интегралов столкновения в регулярных конечно-разностных схемах решения кинетических уравнений;
- -построение случайного процесса (типа процедуры Уалама-Нэймана), соответствующего решению кинетического уравнения;
- -прямое статистическое моделирование физического явления, которое разделяется на два подхода: стационарного и нестационарного прямого моделирования.

Как уже отмечалось во введении, центральное место в динамике разреженных газов занимают методы прямого статистического моделирования.

Работы по конструированию статистических процедур при прямом моделировании открыли широкие возможности по повышению эффективности методов, снижая буквально на порядки объем оперативной памяти ЭВМ по сравнению с первоначальными модификациями, что позволило их применять к решению двухмерных и впоследствии, в том числе с учетом реальных свойств газов трехмерных задач. Однако при исследовании и обосновании применения этих методов фактически невозможно обойтись без рассмотрения описывающего моделируемое явление кинетического уравнения. Установление связи статистической процедуры с решением кинетического уравнения является необходимым по целому ряду причин. Во-первых, для того чтобы доверять решению и использовать полученные результаты в качестве эталонных, поскольку решения многих характерных задач были впервые решены именно методами прямого моделирования и до сих пор не повторены другими методами. Во-вторых, установление соответствия моделирования решению уравнения позволяет использовать хорошо развитый аппарат численных регулярных и статистических методов решения уравнений математической физики для анализа и повышения эффективности методов. И, в-третьих, это позволяет установить некоторый общий подход к построению методов и исключает всякого рода ложные модификации.

Процедура решения задач методом Монте-Карло заключается в том, что физическому явлению или описывающему его уравнению ставится в соответствие некоторый случайный процесс, математическое ожидание которого является оценкой искомых характеристик задачи. Как правило, математическая сложность рассматриваемых в динамике разреженных газов задач позволяет разграничить расчетные методы на регулярные и чисто статистические.

В этих случаях обычно не возникает сомнений в математической обоснованности решений уравнений и, как правило, облегчает анализ погрешностей, поскольку они носят в основном однородный характер. В большинстве случаев из-за сложности задач происходит взаимное проникновение друг в друга разностных и вероятностных подходов. Так, с одной стороны, статистическое моделирование течений газа основано, как правило, на дискретизации физического пространства, а с другой – в разностных методах для вычисления моментов используют методы Монте-Карло.

§ 3. Связь стационарного статистического моделирования и решения кинетического уравнения

При разработке и исследовании методов статистического моделирования, в том числе и прямого моделирования, фактически невозможно обойтись без рассмотрения кинетических уравнений, описывающих данное явление. Так, при разработке метода прямого стационарного моделирования — движения пробных траекторий — Хэвиленд вынужден был привлекать уравнение Больцмана в следующем итерационном виде:

$$\overline{\xi} \frac{df^{(k)}}{dx} = \int (f^{(k)} f_1^{(k-1)} - f^{(k)} f_1^{(k-1)}) gbdbd\varepsilon d\overline{\xi}_1.$$
 (1.3.1)

Наиболее очевидно связь методов Монте-Карло и кинетического уравнения устанавливается для линеаризованого уравнения в виде (1.1.5), когда для него в соответствии с ядром интегрального уравнения строится процедура Улама—Неймана.

Уравнение (1.І.5) записывается в интегральном виде:

$$\varphi(t, x, \xi) = \varphi(t_0, x - \xi(t - t_0))e^{-k(\xi)(t - t_0)} +
+ \int K(\xi, \xi_1)e^{-k(\xi)(t - \tau)}\varphi(\tau, x - \xi(t - \tau), \xi_1)d\xi_1 d\tau$$
(1.3.2)

В более удобной записи, соответствующей фредгольмовскому типу II-рода, оно будет иметь вид

$$\varphi(t,y) = \psi(t,y) + \int P(t_1,y_1,t,y)\varphi(t_1,y_1)dy_1dt_1, \qquad (1.3.3)$$

где y означает фазовое пространство (x, ξ) .

Для молекул твердых сфер вид ядра этого интегрального уравнения хорошо известен. В безразмерной форме:

$$P = \frac{k_0 d^2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi_1^2} \left[g - \frac{2}{g} e^{\xi_1^2} - \frac{(\xi_1 g)^2}{g^2} \right] \times e^{-k_0 d^2 t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int g e^{\xi_1^2} d\xi_1.$$
(1.3.4)

Уравнению (1.3.2) сопоставляется однородная цепь Маркова с начальным распределением, соответствующим начальной функции распределения

$$\Psi(t, y) = \varphi[t_0, y - \xi(t - t_0)]e^{-\frac{k(\xi)(t - t_0)}{2}}$$

и матрицей перехода, соответствующей ядру (1.3.4).

В этом случае вероятность последовательности $(t_1,y_1) \to (t_2,y_2) \to \dots (t_e,y_e)$, состоящей из l рассеяний, равна

$$\Psi(t_1, y_1)P(t_1, y_1 \to t_2y_2)P(t_2y_2 \to t_3y_3) \dots \times$$

$$\times P(t_{e\text{--}1}, y_{e\text{--}1} \rightarrow t_e, y_e) dt, dy \dots dt_e, dy_e,$$

и математическое ожидание некоторой случайной величины

$$X = \sum_{i=1}^{e} \xi(t_i, y_i)$$

будет равно функционалу от решения исходного уравнения

$$(\varphi, \Psi) = M[X].$$

Решение нелинейного кинетического уравнения методом стационарного статистического моделирования фактически проводится методом итераций. В каждой k-й итерации получается линейное интегральное уравнение, которое, в этой итерации решается методом Монте-Карло. Так, например, для модельного уравнения Крука оно имеет вид

$$f^{(k+1)} = f_n e^{-\int v^{(k)} dt} + \int \frac{f_0^{(k)}}{n^{(k)}} e^{-\int v^{(k)} dt} f^{(k+1)} d\xi dt.$$
 (1.3.5)

В каждой итерации вычисляются макропараметры, входящие в исходное уравнение n^{k+1} , u^{k+1} , u^{k+1} , u^{k+1} и v^{k+1} и после этого переходят к следующей итерации. Если метод последовательных приближений сходится, то переход от одной итерации к другой в конечном итоге, приводит к решению кинетического уравнения.

§ 4. Построение метода прямого статистического моделирования

Рассмотрим для простоты однородное уравнение Больцмана:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = J(f, f) . \tag{1.4.1}$$

Будем решать его методом последовательных приближений. Метод последовательных приближений выберем в форме Эйлера:

$$f^{0} = f(0),$$

$$f^{1} = f^{0} + J(f^{0}, f^{0})\Delta t,$$

$$f^{2} = f^{1} + J(f^{1}, f^{1})\Delta t,$$

$$f^{n} = f^{n-1} + J(f^{n-1}, f^{n-1})\Delta t.$$
(1.4.2)

Введем в поле решения расчетную лагранжеву сетку, т.е. представим функцию распределения некоторой системой N частиц, каждая из которых характеризуется скоростью движения ξ_i . Систему (1.4.2) будем решать по методу дробных шагов, т.е. на полушаге по времени рассматривать изменение внутреннего состояния системы.

Таким образом, счет можно вести так: на лагранжевом этапе вычислений в каждом приближении по времени определяется перенос частиц, в данном случае

$$f_i^n = f_i^{n-1/2}, \quad \Delta \xi \ f(t, \xi_i) = f(t - \frac{\Delta t}{2}, \xi_i) \Delta \xi \ ,$$
 (1.4.3)

где f_i — часть функции распределения, аппроксимируемая частицами со скоростями в районе ξ_i , а эйлеров этап, так же как и в полурегулярных методах, можно оценивать с помощью методов Монте-Карло. Так, из формы этапа релаксации $\Delta \xi \ f^{n+1/2}(t+\Delta t,\xi_i)=$

$$= \frac{\Delta t}{2} T_i^n \Delta \xi - v^n(t) \frac{\Delta t}{2} f^n(t, \xi_i) \Delta \xi$$
 (1.4.4)

видно, что часть молекул, пропорциональная частоте столкновений на предыдущем шаге и шагу по времени, скоростей не меняют, а часть молекул меняет скорости в соответствии с величиной $J^{n}(t,\xi_{\scriptscriptstyle i})$. В частности, расчет правой части (1.4.4) можно проводить так. По величине $v^n(t)$ и лагранжевой сетке (количеству частиц, аппроксимирующих функцию распределения) на *n*-м шаге можно определить время, которое тратится на одно столкновение, и в соответствии с вероятностью столкновения $\xi(g)$ выбираются пары молекул, над которыми производится акт столкновения. Количество сталкивающихся пар выбирается так, чтобы общее время, затраченное на столкновения, не превосходило шага по времени. Остальные частицы за этот шаг скоростей не меняют. Таким образом, после этапа релаксации часть частиц изменяет скорости, а часть остается без изменения, а в общем лагранжева сетка изменится. После этого вновь происходит шаг по времени и процесс продолжается в соответствии с системой (1.4.2) вплоть до установления последовательных приближений к решению уравнений Больцмана (1.4.1). Можно видеть, что описанный здесь процесс решения кинетического уравнения аналогичен процедуре прямого моделирования Берда.

Подобные несложные рассуждения позволяют, как мы увидим в дальнейшем, оценивать погрешности методов и строить схемы решения.

ГЛАВА II

РАЗРАБОТКА ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Совершенствование метода ВГК (Власова, Горелова, Когана)

В работе [97] предложен способ решения линеаризированного уравнения Больцмана методом Монте-Карло. Этим методом было получено точное решение ряда задач динамики разреженного газа (Коган, Власов, Горелов, Хлопков, [97, 98]). В [97] метод применялся для псевдомаксвелловских молекул, для которых сечение столкновения обратно пропорционально относительной скорости сталкивающихся частиц $\sigma = \sigma_0 \ / \ g$. В работе [98] проводится исследование сходимости и точности метода при распространении на другие законы взаимодействия молекул.

Рассмотрим слабовозмущенное течение. В этом случае функция распределения мало отличается от некоторой характерной максвелловской функции распределения т.е.

$$f = f_{00}(1+\varphi)$$
 (2.1.1)
$$f_{00} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{m}{2k T_0} \xi^2\right), \quad \varphi << 1,$$

здесь m — масса молекулы, k — постоянная Больцмана, ξ — скорость молекулы, ϕ — малая добавка, квадратом которой можно пренебречь.

Процесс переноса можно рассматривать, как однородную цепь Маркова, звеньями которой являются положения частицы непосредственно перед столкновением. Поскольку рассматриваются малые добавки к функции распределения и ее моментам, то статистические ошибки могут быть порядка искомых величин. Поэтому блуждание пробной молекулы разыгрывается на равновесной функции распределения f_{00} и из полного переноса вычитается перенос, совершаемый на абсолютном максвелловском распределении. В этом случае средний перенос некоторого молекулярного признака через какую-либо плоскость равен

$$\Psi = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right) \sum_{\beta(\alpha)} \Psi_{\alpha\beta} , \qquad (2.1.2)$$

где N — количество траекторий, W и W_0 — вероятности пролета частицы по траектории α соответственно для возмущенного и невозмущенного течений, $\beta(\alpha)$ — число пересечений траекторией данной плоскости.

Блуждание молекулы происходит следующим образом.

- 1. На одной из границ разыгрываются скорости влетающей молекулы с плотностью вероятности пропорционально $f_{00}(\vec{\xi})\cdot(\vec{\xi},\vec{n})$.
- 2. Пролет времени τ без столкновений и столкновение в элементе $d\tau$ разыгрывается с вероятностью

$$d au \exp\left(-\int \left[\int f_{00}g\sigma \ d\vec{\xi}_{1}\right]d au\right)\int f_{00}g\sigma \ d\vec{\xi}_{1}$$
.

- 3. Скорость молекулы партнера разыгрывается с плотностью вероятности $g\sigma f_{00}(\vec{\xi}_1)$.
- 4. Столкновение разыгрывается по закону взаимодействия данных молекул,

и т.д., начиная с пункта 2, пока молекула не покинет области течения.

Отношение W/W_0 находится по формуле

$$\frac{W}{W_0} = \frac{F_w}{F_{w0}} \frac{P}{P_0} \frac{F}{F_0} \frac{Q}{Q_0} \dots$$
 (2.1.3)

где F_w , F_{w_0} — вероятность вылета молекулы с границы соответственно для возмущенного и невозмущенного течений, P и P_0 — вероятности свободного пролета времени τ , F и F_0 — вероятности столкновения в элементе $d\tau$ с молекулой, летящей со скоростью $\vec{\xi}_1$, Q и Q_0 — вероятности столкновения с данным прицель-

ным расстоянием. Пользуясь линейностью задачи, выражение (2.1.3) представляется в виде суммы

1.
$$F_{w} = \frac{(\vec{\xi}_{1}, n)f_{0}(1 + \varphi_{w})d\vec{\xi}}{N_{u}}, F_{w_{0}} = \frac{(\vec{\xi}_{1}, \vec{n})f_{0}d\vec{\xi}}{N_{0}},$$

$$N_{u} = \int (\vec{\xi}_{1}, \vec{n})fd\vec{\xi}, N_{0} = \int (\vec{\xi}_{1}, \vec{n})f_{0}d\vec{\xi}.$$

$$2. P = \exp(-\iint f_{1}g\sigma d\vec{\xi}_{1}d\tau)d\tau \int f_{1}g\sigma d\vec{\xi}_{1} =$$

$$= \exp(-\iint f_{01}(1 + \varphi_{1})g\sigma d\vec{\xi}_{1}d\tau)d\tau \int f_{01}(1 + \varphi_{1})g\sigma d\xi_{1},$$

введем обозначения: $K_0=\int f_0 g \sigma d \vec{\xi}_1$, $K_0 k=\int f_0 \phi g \sigma d \vec{\xi}_1$.

Тогда, пользуясь тем, что k << 1:

$$P = \exp\left(-K_0\tau - K_0\int kd\tau\right)d\tau(K_0 + K_0k) =$$

$$= \exp\left(-K_0\tau\right)(1 - K_0\int kd\tau)d\tau K_0(1+k).$$

Аналогично для $P_0 = \exp(-K_0 \tau) d\tau K_0$.

3.
$$F = \frac{f_1 g \sigma \xi_0}{\int f_1 g \sigma d \vec{\xi}_1}, \frac{f_{01}(1+\phi_1) g \sigma d \vec{\xi}_1}{FK_0(1+k)},$$

$$F_0 = \frac{f_{01} g \sigma \xi_1}{K_0}.$$

4. Q и Q_0 равны для равновесной и истинной траекторий.

Подставляя значения полученных вероятностей в выражение (2.1.3), найдем

$$\frac{W}{W_0} = \frac{N_0}{N_u} (1 + \varphi_w) (1 - K_0 \int k d\tau) (1 + \varphi_1) \dots =$$

$$= \frac{N_0}{N} (1 + \varphi_w - K_0 \int k d\tau + \varphi_1 + \dots). \tag{2.1.4}$$

Учитывая, что с поверхности границы влетает SN_u молекул, в окончательном виде получим

$$\Psi = \frac{SN_0}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} (\varphi_w - K_0 \int k d\tau + \varphi_1 + ...) \sum_{\beta(\alpha)} \psi \alpha \beta, \qquad (2.1.5)$$

где S — площадь границы.

Из проведенных рассуждений следует, что для розыгрыша пробной молекулы необходимо знать функцию распределения полевых частиц. Поэтому задача решается методом последовательных приближений. За начальное приближение можно взять любую функцию, например нуль. Счет ведется до тех пор, пока $\phi^{(n)} \approx \phi^{(n-1)}$ с заданной точностью. Счет по описанной методике в какой-то мере экивалентен решению уравнения Больцмана по следующей итерационной схеме:

$$\frac{df^{(n)}}{dt} = -f^{(n)}J_2^{(n-1)} + J_1^{(n-1)}.$$

Действительно,

$$f = f_w \exp(-\int J_2 d\tau) + \int J_1 \exp(-\int J_2 d\tau) d\tau, \qquad (2.1.6)$$

где f_w – начальная функция

Линеаризируя это уравнение, получим

$$J_{2} = \int f g \sigma d\vec{\xi}_{1} = K_{0}(1+k),$$

$$J_{1} = \int f f'_{1} g \sigma d\vec{\xi}_{1} + \int f_{0} f_{01}(1+\varphi'+\varphi'_{1}) g \sigma d\vec{\xi}_{1} =$$

$$= f_{0}K + \int f_{0} f_{01}(\varphi'+\varphi'_{1}) g \sigma d\vec{\xi}_{1}.$$
(2.1.7)

Если мы в последнем члене значения J_1 заменим штрихованные скорости через нештрихованные по формулам сохранения

$$\vec{\xi}' = \vec{\xi} + \vec{n}(\vec{g}, \vec{n}),$$

$$\vec{\xi}'_1 = \vec{\xi} - \vec{n}(\vec{g}, \vec{n}),$$

то получим

$$J_{1} = f_{0}K_{0} + \int f_{0}f_{01}\varphi[\vec{\xi}_{1}\vec{\xi}]g\sigma d\vec{\xi}_{1}. \qquad (2.1.8)$$

Подставляя значения J_1 и J_2 в уравнение (2.1.6), находим, что искомый функционал Ψ будет равен ($\Psi = \Psi_0 + \psi$, $\psi << 1$),

$$\Psi = \int f_{w} \exp\left(-\int J_{2} d\tau\right) \mu d\vec{\xi} + \iiint f f_{1}' \exp\left(-\int J_{2} d\tau\right) \mu g \sigma d\vec{\xi}_{1} d\vec{\xi} d\tau,$$

делая замену переменных $\xi', \xi'_l \to \xi, \xi_l$ и используя теорему о сохранении фазового объема, получим

$$\Psi = \int f_{w} \exp\left(-\int J_{2} d\tau\right) \psi d\vec{\xi} + \iiint f^{(n)} f_{1} \exp\left(-\int J_{2} d\tau\right) \psi' g \sigma d\vec{\xi}_{1} d\vec{\xi} d\tau$$

В итерационной схеме (2.1.6) Ч будет иметь вид

$$\Psi^{(n)} = \int f_{w} \exp\left(-\int J_{2}^{(n-1)} d\tau\right) \psi d\vec{\xi} +
+ \iiint f^{(n)} f_{1}^{(n-1)} \exp\left(-\int J_{2}^{(n-1)} d\tau\right) \psi' g \sigma d\vec{\xi}_{1} d\vec{\xi} d\tau.$$
(2.1.9)

И подставляя значения (2.1.7) и (2.1.8) в (2.1.9):

лись отдельно и записывались в таблицу.

$$\Psi^{(n)} = \int (\varphi_{w} - K_{0} \int k^{(n-1)} d\tau) f_{0} \psi d\vec{\xi} +
+ \iiint (\varphi^{(n)} + \varphi^{(n-1)} - K_{0} \int k' d\tau) f_{01} \psi' g \sigma d\vec{\xi}_{1} d\vec{\xi} d\tau$$
(2.1.10)

Из такой записи видно, что выражение (2.1.5) есть не что иное, как математическое ожидание функционала (2.1.10).

Как указывалось выше, для вычисления искомых функционалов в каждой точке физического пространства необходимо помнить функцию распределения. Кроме того, существенную трудность составляет вычисление трехмерного интеграла $K_0 k = \int f_{01} \phi_1 g \sigma d \vec{\xi}_1$, который необходимо вычислять по нескольку раз в одной траектории. Поэтому для сокращения времени счета перед началом следующей итерации эти интегралы вычисля-

Задача существенно упрощается для псевдомаксвелловских молекул, для которых $\sigma=\sigma_0\ /\ g$. В этом случае $\ K_0=n_0\sigma_0$, а

 $K_0 k = n_0 \sigma_0 \nu$, где ν — добавка к плотности, не зависящая от скоростей. И мы избавляемся от необходимости вычислять интегралы.

Поэтому, ввиду относительной простоты, численное исследование метода было проведено на решении задачи о вычислении коэффициентов переноса для псевдомаксвелловских молекул

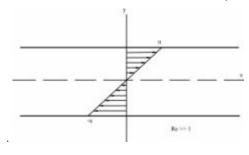


Рис. 2.1

Задача ставилась следующим образом [97]. Из бесконечной области течения вырезается слой с заданными градиентами скорости и температуры толщиной порядка длины свободного пробега (рис. 2.1).

Градиенты $\frac{\partial T}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$ должны удовлетворять условию, чтобы на расстоянии длины свободного пробега макропараметры T и u менялись незначительно.

По формуле (2.1.5) вычисляются тензор напряжений и поток энергии через плоскость x=0, и по известным формулам

$$P_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial x}, q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}$$

находятся коэффициенты вязкости и теплопроводности.

Численным экспериментом была установлена зависимость точности счета от числа разыгранных траекторий, от числа ячеек по скоростям и от длины скоростных осей. Было найдено, что для вычисления тензора напряжений необходимо брать оси длиной 2,5 тепловых скоростей. Дальнейшее увеличение длин осей не сказывается

на точности результатов. Для вычисления потока тепла необходимо обрезание не менее 2,8 тепловых скоростей.

Ухудшение точности в случае теплопередачи можно объяснить тем, что q_x является моментом более высокого порядка по отношению к P_{xy} . Кроме поведения интегральных характеристик течения рассматривалась функция распределения [98]. Следует отметить хорошее совпадение полученных значений при наиболее вероятных скоростях и полное соответствие с переменной знака, что имеет большое значение для вычисления интегральных характеристик течения

Результаты исследования схемы для псевдомаксвелловских молекул были перенесены на модель молекул в виде твердых сфер. Вычислялись коэффициенты вязкости и теплопроводности и сравнивались с их теоретическими значениями.

Таким образом, учитывая результаты работ [97, 98], можно сделать вывод, что метод применим для молекул с любыми обрезанными потенциалами взаимодействия, а также для газовой смеси.

§ 2. Модификация метода Власова для решения линейных задач

Рассматривается метод математического моделирования линейных процессов в разреженном газе, позволяющий в отличие от предыдущего метода вести счет без запоминания функции распределения, что позволяет существенно сократить оперативную память вычислительной машины (Власов, Хлопков [99]). Этот метод является естественным распространением метода Власов [35] на линейные задачи.

Суть метода состоит в следующем. Поле течения разбивается на ячейки. При попадании пробной молекулы в ячейку, в которой происходит столкновение, необходимо знать функцию распределения полевых молекул в этой ячейке, чтобы найти скорость пробной после столкновения. Для того чтобы не хранить в памяти ЭВМ функцию распределения, делается такая процедура. В каждой ячейке запоминается скорость пробной молекулы с вероятностью пропорциональной Δt — времени пребывания пробной молекулы в этой ячейке. Так как частота посещения пробной молеку-

лы данной ячейки пропорциональна $\xi f(\xi)$, то частота ее запоминания пропорциональна $\xi f(\xi) \Delta t$. Поскольку $\Delta t \sim \frac{1}{\xi}$, то частота запоминания пропорциональна $f(\xi)$. Таким образом, при столкновении пробной молекулы в какой-либо ячейке в качестве скорости молекулы партнера берется скорость заполнения в этой ячейке с вероятностью, пропорциональной Δt . Вычислительная схема метода существенно упрощается, если рассматривать псевдомаксвелловские молекулы. В этом случае частота столкновений $N=\int f_1 g\sigma d\xi = \sigma_0 n$. Вероятность столкновения в какой-либо ячейке равна $\sigma_0 n \Delta t$. Вероятность того, что молекула влетит в эту ячейку, пропорциональна $\xi f(\xi)$. И вероятность столкновения молекулы ячейке пропорциональна пробной $\xi f(\xi)\sigma_n\Delta t - \sigma_0 nf - f(\xi)$.

Таким образом, счет можно вести так: в ячейке, в которой происходит столкновение, запоминать скорость, с которой частица влетает в эту ячейку, а расчет столкновения производить со скоростью, запомненной от предыдущего столкновения.

В линейном случае метод выглядит следующим образом.

На границе задается функция распределения влетающих молекул, мало отличающаяся от равновесной. Макроскопические параметры также мало отличаются от характерных равновесных значений:

$$T = T_0(1 + \varepsilon\theta), n = n_0(1 + \varepsilon v), \varepsilon << 1.$$

Розыгрыш траекторий производится на равновесной функции распределения:

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{m}{2k T_0} \xi^2\right),$$

а истинными параметрами траектории считаются параметры равновесной траектории плюс добавки порядка \mathcal{E} :

$$\vec{v} = \vec{\xi} + \varepsilon \vec{\zeta}, \ v = \tau + \varepsilon \sigma \tau,$$

где \vec{V} – скорость, V – время свободного пробега для истинной траектории, а τ – для равновесной.

- 1. Скорость пробной молекулы, влетевшей в поле течения, разыгрывается в соответствии с граничными условиями на равновесной функции распределения, а значение истинной скорости находится по формуле: $\vec{v} = \vec{\xi} + \varepsilon \vec{\zeta}$, где $\vec{\xi}$ зависит от параметров на границе.
- 2. Свободный пробег, где R случайное число, равномерно распределенное от 0 до 1.
- 3. Столкновение. В каждой ячейке перед столкновением запоминаем и , скорость с которой молекула вошла в ячейку, где происходит столкновение, а столкновение производим по формуле:

$$\vec{v}' = \frac{1}{2} \left(\vec{v} + \vec{v}_1 + \vec{n} G \right),$$

$$G = \left| \vec{v} - \vec{v}_1 \right|,$$

где \vec{v}_1 , — скорость от предыдущего столкновения. Отсюда получаем отдельно для ξ и ζ :

$$\begin{split} \vec{\xi}' &= \frac{1}{2} \left(\vec{\xi} + \vec{\xi_1} + \vec{n}g \right), \ g = \left| \vec{\xi} - \vec{\xi_1} \right|, \\ \vec{\zeta} &= \frac{1}{2} \left(\vec{\zeta_1} + \vec{\zeta_1} + \vec{n}\frac{\left(\vec{g}, \vec{g}_1 \right)}{g} \right), \ g_1 = \left| \vec{\zeta} - \vec{\zeta_1} \right|. \end{split}$$

Таким образом, молекула будет блуждать до тех пор пока не покинет область течения.

Пусть $\psi(v)$ – некоторый молекулярный признак, макропараметры Ψ вычисляются по формуле:

$$\Psi = \frac{\sum \psi \Delta t}{\Delta SN / N_{\nu}},$$

где Δt — время пребывания пробной молекулы в ячейке, N — количество траекторий, N_u — количество молекул, влетевших с границы.

Чтобы искомые малые отклонения от равновесных значений не забивались статистическими ошибками, необходимо значения Ψ разложить на Ψ_0 и δ Ψ и вычесть Ψ_0 . Тогда

$$\begin{split} \delta \Psi &= \frac{\Psi - \Psi_0}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon \Delta S} \left(\frac{N_u}{N} \sum \psi \Delta t_0 - \frac{N_0}{N} \sum \psi \Delta t_0 \right) = \\ &= \frac{N_0}{N \Delta S} \left[SN \sum \psi_0 \Delta t_0 + \sum \delta \Psi \Delta t_0 \right] \end{split}$$

или окончательно

$$\partial \Psi = \frac{N_0}{N\Delta S} \sum \left[\psi_0 \left(\delta \ N \Delta t_0 + \delta t \right) + \delta \psi \Delta t_0 \right].$$

Здесь N_0 — количество влетевших молекул на равновесии:

$$\Delta t = \Delta t_0 + \varepsilon \, \Delta t \,, \quad N = N_0 + \varepsilon \, \delta \, N \,.$$

Метод был апробирован на задаче Куэтта о течении между параллельными пластинами с равными температурами, движущимися друг относительно друга с малыми скоростями.

На границе задается диффузное отражение молекул:

$$f_{\pm} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k T_0} \left[\left(\xi_x \pm \varepsilon w \right)^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 \right] \right).$$

Поле течения разбивается на ячейки. В данной работе использовалось разбиение на 20 ячеек.

В нашем случае $\delta N = 0$, и искомая скорость

$$U = \frac{N_0}{N\Delta S} \sum (\xi_x \delta t + \zeta_x \Delta t_0).$$

Ошибку в данном случае можно примерно оценить:

$$\delta = 5\% + \sqrt{\frac{D}{N}} .$$

Метод показал хорошую сходимость и согласование с результатами, полученными ранее для уравнения Больцмана в работе [97].

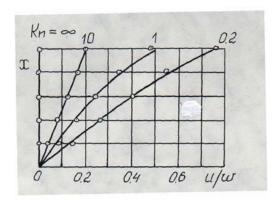


Рис. 2.2. Профиль скорости в течении Куэтта

На рис. 2.2 представлена зависимость поведения скорости потока, отнесенной к скорости стенки, от числа Кнудсена. Точками нанесены данные, полученные в работе [97], сплошными кривыми – результаты данной работы [99].

§ 3. Метод решения линеаризированного уравнения Больцмана

В предыдущих параграфах данной главы разрабатывались методы на основе пробных частиц, и хотя они показали свою эффективность при решении ряда практических задач (см. гл. V), оба они требуют разбиения физического пространства на ячейки (первый из них, кроме того, еще и фазового), что не всегда обязательно при численном решении классических линейных уравнений математической физики. Поэтому естественна попытка найти метод решения линейных задач, не требующий разбиения пространства н ячейки (Хлопков [36]).

Рассмотрим течения, слабо отклоняющиеся от равновесных. В этом случае функцию распределения можно представить в виде

$$f = f_0(1+\varphi), \quad \varphi << 1,$$
 (2.3.1)

где

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{m}{2k T_0} \xi^2\right),$$

и уравнение Больцмана линеаризуется:

$$\xi_{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \xi_{y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \xi_{z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\varphi k(v) + \int K(\xi, \xi_{1}) \varphi_{1} d\xi_{1}, \quad (2.3.2)$$

здесь
$$\xi = \xi \sqrt{\frac{m}{2kT}}$$
 .

Аналитические выражения и для молекул, взаимодействующих по закону твердых сфер, имеют форму:

$$k = a \int g e^{-v_1^2} dv_1 \,, \tag{2.3.3}$$

$$K = Be^{-v^2} \left(g - \frac{2}{g} e^{D^2} \right) , \qquad (2.3.4)$$

где $g = v_1 - v$, a и B – постоянные коэффициенты.

Интегрируя уравнение (2.3.2) вдоль траекторий, приходим к линейному интегральному уравнению:

$$\varphi = \varphi_r + \int K \varphi_1 dv_1 dl , \qquad (2.3.5)$$

где

$$\varphi_r = \varphi_w e^{-\frac{k}{\nu}(l - l_0)} \tag{2.3.6}$$

$$K = \frac{1}{\nu} K e^{-\frac{k}{\nu} (l_1 - l_0)}, \tag{2.3.7}$$

к которому применима статистическая процедура Улама—Неймана. В общем случае расчет методом Монте-Карло сводится к вычислению интегралов. Этими интегралами являются математические ожидания случайных величин, используемых в качестве оценок, другими словами, производится оценка интеграла типа Лебега—Стильтьеса по некоторой вероятной мере:

$$l = \int \psi(x) u dx \tag{2.3.8}$$

с помощью среднего арифметического по количеству испытаний:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \psi(x_i). \tag{2.3.9}$$

В случае решения интегральных уравнений интеграл представляет собой функционал от решения уравнения

$$\varphi(x) = \varphi_r(x) + \int K(x, y)\varphi(y)dy, \qquad (2.3.10)$$

где D есть область S-мерного евклидова пространства $x \in D$, $y \in D$;

 $\varphi(x)$ и $\varphi_r(x)$ – функции, определенные в D, ядро K(x,y) определено на декартовом произведении D на себя и интеграл в уравнении понимается в смысле Лебега. Легко видеть, то уравнение (2.3.5) есть частный случай общего линейного интегрального уравнения (2.3.10). Решение такого уравнения дается сходящимся рядом Неймана:

$$arphi(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\psi_{i}(x)\,,$$
 где $\psi_{i}(x)=\int\limits_{D}K(y,x)\psi_{i-1}(y)dy\,.$

В этом случае искомый функционал представляется в виде суммы кратных интегралов:

$$\begin{split} I = & \left(\varphi, h \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \int\limits_{R_i} \varphi_r(x_0) K(x_0, x_1) ... K(x_{i-1}, x_i) h(x_i) d\theta_i, \\ \text{где} \qquad & R_i = \underbrace{D \times D \times D ... \times D}_{i}, \qquad \qquad R_0 = D \,, \qquad d\theta_0 = dx_0 \,, \\ d\theta_i = & dx_0 dx_1 ... dx_i \,. \end{split}$$

Обычно с уравнением (2.3.10) связывают однородную цепь Маркова, заданную плотностью начального распределения и переходной плотностью $p(x \to y)$. Выборочная траектория цепи

строится в соответствии с начальной и переходной плотностями вероятности. Тогда оценка (2.3.9) искомого функционала будет иметь вид

$$\psi = \sum_{i=0}^{k} Q_i(x_0,...,x_i)h(x_i),$$

где

$$Q_{0} = \frac{\varphi_{r}(x_{0})}{\pi(x_{0})},$$

$$Q_{i} = Q_{0} \frac{k(x_{0}, x_{1})}{p(x_{0} \to x_{1})} \cdots \frac{k(x_{i-1}, x_{i})}{p(x_{i-1} \to x_{i})},$$

где k – количество столкновений в траектории.

Таким образом, зная аналитическое выражение ядра, можно строить простой алгоритм вычисления различных функционалов решения интегрального уравнения.

При численном решении уравнения в качестве цепи Маркова рассматриваются траектории молекул на равновесной функции распределения. В этом случае используем простой процесс розыгрыша траекторий, близких к истинным, что существенно уменьшает дисперсию. Процесс моделирования случайной величины полностью эквивалентен методу последовательных приближений, и поэтому решение, полученное методом Монте-Карло, сходится к решению уравнения Больцмана.

Метод был апробирован на задаче о вычислении коэффициентов переноса. Из поля течения с заданными градиентами макропараметров вырезается слой газа толщиной порядка длины свободного пробега молекул. На верхней и нижней границах слоя предполагается навье-стоксовское распределение с заданными скоростями и градиентами скоростей. Для такой задачи имеется точное решение, например, методом Чепмена—Энскога.

Таким образом, с верхней и нижней границ молекулы будут влетать с известной функцией распределения, а перенос молекулярного признака вычисляется через плоскость симметрии. Про-

верка метода проведена на вычислении коэффициентов вязкости для молекул – твердых шаров. Функционал в нашем случае

$$p_{xy} = -\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \int f_0 \varphi \xi_x \xi_y d\vec{\xi}$$

вычисляется по формуле среднего арифметического. В качестве цепи Маркова выбирается блуждание на абсолютно равновесной функции распределения f_0 .

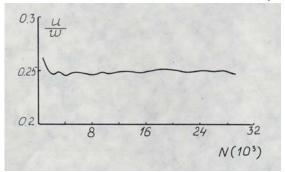


Рис. 2.3. Задача Куэтта

На рис. 2.3 представлена зависимость скорости от количества траекторий N в тысячах для молекул — твердых шаров.

Поскольку в данном случае ни физическое, ни скоростное пространство не разбивается на ячейки и нет никаких ограничивающих предположений, то статистическая ошибка может быть сведена к нулю при увеличении количества испытаний. Полученная систематическая ошибка зависит исключительно от качества датчика случайных чисел:

$$\delta \approx 3\% + \sqrt{\frac{D}{N}}$$
.

Численный счет по разработанной методике обладает рядом существенных преимуществ по сравнению с другими методами. Он позволяет решать линеаризованное уравнение Больцмана не только без запоминания функции распределения, но и без запоминания макропараметров, поскольку, если граничная функция распределения задана, то решение находится в первом приближении.

ГЛАВА III

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗОВ

§ 1. Метод решения модельного уравнения, основанный на стационарном моделировании

В этом параграфе излагается метод решения линейных и нелинейных задач динамики разреженных газов, который позволяет обходиться без запоминания функции распределения, используя в качестве базового уравнения упрощенную модель уравнения Больцмана в виде (Коган [8]):

$$\frac{df}{dt} = An(f_0 - f) \tag{3.1.1}$$

Изложение ведётся в соответствии с работой (Хлопков, [39]).

Принципиальное отличие модельного уравнения от уравнения Больцмана состоит в том, что это уравнение предполагает функцию распределения молекул после столкновения наиболее вероятной при заданных числах сталкивающихся частиц, их импульсе и энергии. Знание макропараметров полностью определяет траекторию пробной частицы, поскольку скорости молекул после столкновения распределены с функцией

$$f_0 = n \left(\frac{m}{2\pi \ kT}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT}(\xi - u)^2}.$$
 (3.1.2)

Поскольку в линейном случае вычисляются малые добавки к равновесным макропараметрам, то траектории разыгрываются, как и в предыдущем случае, на абсолютно равновесной функции распределения f_{00} , а перенос молекулярного признака вычисляется с весом W/W_0 , и из полного переноса вычитается перенос, совершенный на абсолютно равновесной функции распределения

$$f_{00} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi \ kT_0}\right)^{3/2} e^{-\frac{m}{2kT_0}\xi^2}.$$
 (3.1.3)

Траектория пробной частицы строится следующим образом:

1. С границы молекулы влетают с плотностью вероятности

$$\frac{f_{00}(\overline{\xi},\overline{n})}{N_0}$$
.

- 2. Пролет времени au без столкновений и столкование в элементе d au разыгрывается с вероятностью $e^{-An_0 au}An_0d au$.
- 3. Скорости после столкновения распределены с вероятностью f_{00}/n_0 и т.д., начиная с пункта 2, пока молекула не покинет область течения.

Отношение вероятностей W/W_0 строится аналогично пункту 2 § 2.

В этом случае

$$\frac{W}{W_0} = \frac{N}{N_0} (1 + \varphi_w - A n_0 \int v d\tau + v + \varphi_{\pi} + ...), \qquad (3.1.4)$$

где $\phi_{_{\Pi}}$ определяется из формулы

$$f_0 = f_{00}(1 + \varphi_0) \ .$$

Макропараметры $\overline{\Psi}$:

$$\overline{\Psi} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right)_{\alpha} \sum_{\beta(\alpha)} \Psi_{\alpha\beta} = \frac{1}{N} \sum_{\alpha=1}^{N} \left(\frac{W}{W_0} - 1 \right)_{\alpha} \sum_{\beta(\alpha)} \left(\frac{W}{W_0} - \frac{1}{N} \sum_{\alpha \neq 1} \left(\frac{W}{W_0} - \frac{1}{N} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right)$$

В (3.1.5) функция распределения не входит и, следовательно, из предыдущего приближения достаточно знания макропараметров, которые входят в φ_{π} .

Можно показать, что счет по описанной методике аналогичен решению по следующей интерационной схеме:

$$f^{(i)} = f_w e^{-\int An^{(i+1)}d\tau} + \int An^{(i-1)} f_0^{(i-1)} e^{-\int An^{(i-1)}d\tau} d\tau, \qquad (3.1.6)$$

функционал $\overline{\Psi} = \overline{\Psi}_0 - \overline{\psi}$ будет иметь вид

$$\Psi^{(i)} = \left(f_w e^{-\int An^{(i-1)} d\tau}, \psi \right).$$

Линеаризируя это уравнение, получим

Линеаризируя это уравнение, получим
$$\overline{\Psi}^{(i)} = \begin{pmatrix} e^{-An_0\tau} f_{00}(\varphi_w - An_0 \times \varphi d\tau), \psi + \\ & & \\ \times \int \begin{pmatrix} An_0 e^{-An_0\tau} f_{00} \times \\ + \int_{\times} \begin{pmatrix} \gamma^{(i-1)} + \varphi^{(i-1)} - \\ -An_0 \int v^{(i-1)} d\tau \end{pmatrix} d\tau, \psi \end{pmatrix}. \tag{3.1.7}$$

такой записи видно, что выражение (3.1.5) среднеарифметической оценкой математического Апробация метода была проведена на линейной задаче о течении Куэтта. На этом сравнительно простом течении опробованы почти все известные методы решения уравнения Больцмана. Рассматривается течение между двумя плоскими параллельными бесконечными пластинами при различных числах Кнудсена, маотносительных скоростях W_{+} и малых отношениях температур $T_{W_{\cdot}}$ пластинок. При этих предположениях задача линеаризуется и, кроме того, может быть разбита на две: задачу о чистом сдвиге при $T_{W_{\star}}=T_{W}$, для которой $\gamma=\tau=0$, и задачу о теплопередаче, для которой U = 0. Здесь γ и τ –безразмерные добавки к плотности n_0 и T_0 соответственно.

В безразмерном виде уравнение (3.1.1) имеет вид

$$\frac{v_x}{d}\frac{d\varphi}{d\tau} = -\varphi + \gamma + 2v_y u_y + \left(v^2 - \frac{3}{2}\right)\tau. \tag{3.1.8}$$

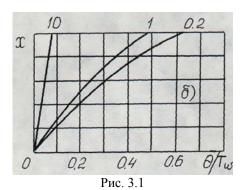
где
$$v=\xi\sqrt{n_0}\,,$$
 $lpha=An_0d\sqrt{n_0}$ – величина обратно

пропорциональная числу Кнудсена. Так как $A=\frac{kT}{\mu}$, где μ для

псевдомасквелловских молекул равна $\frac{2kT}{3}$ и $\lambda = \frac{1}{n_0 \, 3_0 \sqrt{n_0}}$, то

$$d = \frac{n_0 \, 3_0 \, d \sqrt{n}}{2} = \frac{1}{2kn} \, .$$

Поле течения между пластинами разбивается на 10 ячеек, и в каждой ячейке вычисляются добавки к физическим макропараметрам течения.



Отдельно решалась задача о чистом сдвиге и отдельно задача о теплопередаче (профили температуры показаны на рис. 3.1 и практически не отличаются от точного численного решения *Виллиса*).

Отличие полученного решения от точного численного решения модельного уравнения порядка 5%, хотя статистическая ошибка не превышает одного процента при N > 50~000.

Предложенная схема справедлива и в нелинейном случае.

Счет ведется методом последовательных приближений, и в каждом n-м приближении используются значения n, u и T, взятые из (n-1)-го приближения.

Траектория пробной молекулы строится следующим образом.

- 1. На границе течения скорость молекулы распределена с функцией распределения $f_{\tilde{o}}$.
- 2. Свободный пробег за время $\, au\,$ происходит с вероятностью

$$e^{-\int An^{(n-1)}d\tau}$$
.

3. Скорости после столкновения распределены с $f_0^{(n-1)}$ и т.д. начиная с пункта 2.

Искомые параметры $\overline{\Psi}=(n,u,T)$ находятся по формулам $\overline{\Psi}=\frac{1}{N}\sum \psi$.

Счет по описанной методике в какой-то мере эквивалентен решению уравнения по следующей схеме:

$$f^{(n)} = f_w e^{-\int An^{(n-1)}d\tau} + \int A_n^n f_0^{(n-1)} e^{-\int An^{(n-1)}d\tau} d\tau.$$

Действительно, поскольку $n = \int f_1 d\xi_1$,

$$f^{(n)} = f_w e^{-\int An^{(n-1)}d\tau} + \int Af_0^{(n-1)} e^{-\int An^{(n-1)}d\tau} f_1^{(n)} d\xi_1 d\tau,$$

мы получаем линейное относительно $f^{(n)}$ уравнение.

Если для него составить цепь Маркова, идентичную траектории пробной молекулы, то искомые функционалы $\overline{\Psi}$ будут равны математическому ожиданию случайной величины, разыгранной с начальной плотностью вероятности

$$f_w e^{-\int An^{(n-1)}d\tau}$$

и переходной плотностью

$$Af_0^{(n+1)}e^{-\int An^{(n+1)}d\tau}$$
.

§ 2. Возможности схемы расщепления для решения кинетических уравнений

В работе (*Хлопков, Серов,* [71, 74]) рассматриваются возможности схемы прямого статистического моделирования на ос-

нове приближённого кинетического уравнения. Итак, обратимся к модельному уравнению Крука:.

$$\frac{df}{dt} = \gamma (f_0 - f) \tag{3.2.1}$$

$$\gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} - \frac{n}{Kn} \tag{3.2.2}$$

у – частота столкновений.

Схема расщепления в соответствии с главой I имеет вид:

I этап - столкновения

$$\frac{df}{dt} = \gamma (f_0 - f).$$

Запишем итерационную схему этого процесса

$$\frac{f^{n+1}-f^n}{\Delta t^*}=\gamma^n(f_0^n-f^n)$$

ИЛИ

$$f^{n+1} = f^{n} + \gamma^{n} \Delta t (f_{0}^{n} - f^{n}),$$

$$f^{n+1} = f^{n} (1 - \gamma^{n} \Delta t) + \gamma^{n} \Delta t f_{0}^{n}.$$
(3.2.3)

Из (2.3) нетрудно заметить, что число молекул, не изменивших скорость после столкновения (то есть имеющих ту же функцию распределения f^n), составляет $(1-\gamma^n \Delta t)$ часть от единицы, а изменивших — $(\gamma^n \Delta t)$. Таким образом, подсчитывая в каждой ячейке $\gamma^n \Delta t$ и выбирая случайное число R_i — равномерно распределенное от 0 до 1, для каждой частицы в ячейке, мы меняем скорость і-й частицы, если $\gamma^n \Delta t \geq R_i$, и не меняем, если $\gamma^n \Delta t < R_i$.

Разработанная методика была опробована на наиболее простом примере: задаче о теплопередаче между двумя параллельными пластинами, нагретыми до температур T_{w} и T_{L} .

 $T_{w}/T_{L}=4$. Настоящий пример хорошо иллюстрирует все плюсы

и минусы данной методики, потому что имелась возможность сравнения результатов с полученными ранее — работами *Берда и Перепухова* [11, 59]. Последний, кстати, впервые применил к модельному уравнению метод Берда.

Параметры схемы выбирались следующим образом:

Длина свободного пробега в расчетной области меняется, и размер ячейки выбирается меньше минимальной длины пробега λ_{\min} .

В данной работе он выбирается равным $\frac{\lambda_{\min}}{3}$.

Величина шага по времени Δt^* выбиралась из соображений, что она должна быть велика по сравнению со временем столкновения и мала по сравнению со временем свободного пробега.

При каждом столкновении в ячейке, в которой это столкновение произошло, делается шаг по времени

$$\Delta t_c = \frac{2}{N_c} \left[\pi \ b_{\text{max}}^2 (2K)^{\frac{2}{V-1}} n g^{\frac{V-5}{V-1}} \right]^{-1} , \qquad (3.2.4)$$

где N_c — полное число молекул в ячейке; b_{max} — максимальное значение безразмерного параметра столкновения; К — константа в потенциале взаимодействия; n — числовая плотность в ячейке, g — относительная скорость; v — коэффициент для максвелловских молекул, равный пяти. Столкновения в каждой ячейке произво-

дятся до тех пор, пока $\sum_{i=1}^m \Delta t_c = \Delta t^*$, причем две однажды столк-

нувшиеся молекулы больше не сталкиваются. Было показано, что при таком построении процесса и представлении Δt^* в виде суммы "времен отдельных столкновений" моделируемая частота столкновений совпадает с частотой столкновений, полученной из уравнения Больцмана с абсолютной ошибкой, пропорциональной

 $D/N_p^{1/2}$, где D — дисперсия, а N_p — число всевозможных пар молекул в данной ячейке.

Процесс по времени продолжается до тех пор, пока интересующие нас параметры или функция распределения в каждой ячейке не установится. Функции распределения для отраженных молекул задавались следующим образом

$$f_L = n_L \left(\frac{1}{2\pi RT_L}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT_L}\right),$$
 (3.2.5)

$$f_w = n_w \left(\frac{1}{2\pi RT_w}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT_w}\right).$$
(3.2.6)

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} T^* = \sqrt{T_L T_w}; n_{\infty} = \frac{n_L + n_w}{2}, \\ K_n = \frac{\lambda_{\infty}}{L} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{2RT^*}}{n_{\infty} \sigma_0 L}; \frac{T_w}{T_L} = R_T. \end{cases}$$
(3.2.7)

При интерпретации уравнения Kpyka предполагалось, что после каждого столкновения молекулы приобретают локальномакселловскую функцию распределения, т.е. после столкновения скорости молекул можно разыгрывать пропорционально локальномаксвелловской функции распределения. Для модельного уравнения известно, что уже в результате одного столкновения система с произвольной функцией распределения переходит в состояние, близкое к равновесному. Таким образом, мы избавляемся от необходимости в каждом приближении запоминать распределение молекул по скоростям, потому что после столкновения плотность вероятности скорости частиц в точке столкновения есть f_0 .

Значение параметров n и T выбиралось по предыдущему шагу по времени Δt^* в данной ячейке. При таком подходе законы сохранения выполняются в данной ячейке только в целом, а не для каждого столкновения, что в действительности и имеет место для уравнения Крука. Начальное распределение было выбрано в виде

$$f = n_{\infty} \left(\frac{1}{2\pi RT^*}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2RT^*}\right),$$
 (3.2.8)

где ξ – безразмерная скорость молекулы, отнесенная к $\sqrt{2RT}^*$.

Разыгрываем начальные скорости $\sum_{i=1}^{m} S_i$ молекул (S_i – количество

молекул в i-й ячейке, m – количество ячеек), расположенных между пластинами. Выбираем шаг по времени:

$$\Delta t^* = \frac{\alpha}{S} \sqrt{\pi} \operatorname{Kn} \frac{L}{\sqrt{2RT^*}},$$

где S — среднее количество частиц в ячейках, α — коэффициент, изменяющийся в различных расчетах от 1 до 4; в качестве времени столкновения выбираем

$$\Delta t_c = \frac{\sqrt{\pi}}{S_{it}^2} Kn \ S \frac{L}{\sqrt{2RT^*}}, \tag{3.2.9}$$

где S_{it} – число молекул в і-й полосе в момент времени t. В каждой ячейке проводится соответствующее число столкновений, а разность

$$\Delta t_{it} = \Delta t^* - \sum_{i=1}^{\kappa} \Delta t_{c_i}$$
 запоминается и учитывается при следующей

процедуре столкновения.

В результате расчета определяются следующие параметры:

$$n = \frac{S_{it}}{S} n_{\infty}, \quad T = T^* \frac{2}{3} \sum_{S_{it}} \frac{V^2}{S_{it}},$$
 (3.2.10)

$$Q = \frac{m}{2} n_{\infty} (2RT^*)^{3/2} \sum_{S_{ii}} \frac{V^2 V_x}{S},$$

где n, T, Q – соответственно плотность, температура и тепловой поток.

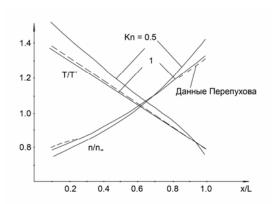


Рис. 3.1. Распределение плотности и температуры для $K_n = 0.5$ и 1 в сравнении с работой *Перепухова*

После того как процесс устанавливается, можно уменьшить ошибку практически до любого значения, осредняя все параметры по большему количеству промежутков времени ΔT^* . Расчеты проводились при следующих значениях параметров задачи: R_T = 4, S = 10, m = 10, K_n = 1 и S = 20, m = 20, K_n = 0,5.

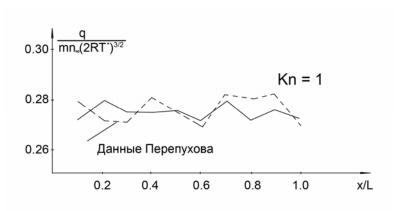


Рис. 3.2. Поток тепла между пластинами

Теперь проиллюстрируем возможности предлагаемой схемы. Параметры выбирались следующим образом: размеры ячейки выбирались из условий, что функция распределения f может измениться на порядок на длине свободного пробега λ_{∞} . Поэтому Δx должно быть много меньше λ_{∞} .

$$\Delta x \ll \lambda_{\infty} \Rightarrow \Delta x \ll \text{Kn } L; \quad \Delta x = 0.1 \text{Kn}$$
 (3.2.11)

Шаг по времени выбирался из условий прохождения ячейки Δx со средней тепловой скоростью (условия устойчивости).

$$\Delta t \le \frac{\Delta x}{\sqrt{2RT^*}}; \quad \Delta t \le \frac{\alpha \text{ Kn } 0.1}{\sqrt{2RT^*}}.$$
 (3.2.12)

Таким образом, физические условия задачи и математические свойства уравнения автоматически определяют параметры схемы счета. В результате расчета определялись величины n, T, Q, подсчитываемые в соответствии с формулами (3.2.10). Расчеты проводились при следующих параметрах задачи:

$$K_n = 1$$
, $R_T = 4$, $S = 10$, 8 , 6 , 4 , 2 , $m = 10$; $K_n = 0.5$, $R_T = 4$, $S = 20$.

Применение новой схемы столкновений позволило уменьшить количество частиц в ячейке для $K_n = 1$ от 10 до 2.

Дальнейшее уменьшение частиц в ячейке приводило к большой ошибке.

Для уменьшения количества частиц в ячейке были предложены следующие изменения в программе:

- 1) Температура для розыгрыша скорости частиц после столкновения бралась не из последнего шага по времени Δt^* , а осреднялась по всем шагам Δt^* в каждой ячейке.
- 2) Плотность частиц в ячейке для вычисления частоты столкновений с последующим моделированием процесса столкновений также осреднялась в каждой ячейке по всем шагам Δt^* .

Данные измерения позволили довести количество частиц в ячейке до 1 и получить хорошие результаты.

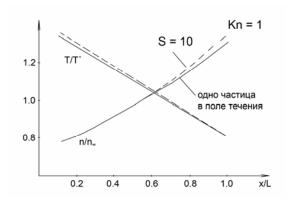


Рис. 3.3. Распределение плотности n и температуры T для 10 и 1 частип в ячейках

Подобный расчёт можно рассматривать как своеобразное экспериментальное подтверждение эргодичности — фундаментального закона природы с одной строны и единой природы методов Бёрда и Хэвиленда с другой. А это, в свою очередь, переносит обоснованность методов «пробных частиц» на методы моделирования при помощи «ансамбля частиц».

Погрешность в численной схеме делится на детерминистическую и статистическую. Детерминистическая погрешность зависит от выбора шага по времени Δt^* и размера ячейки $\Delta x.(\delta_1 \approx 0(\Delta t^*); \quad \delta_2 \approx 0(\Delta x)).$ Статистическая погрешность была подсчитана для S = 8, K_n = 1, m = 10. Для профиля n и T_{CT} =0,02 (на отрезке N = 600, 800), N – количество шагов по времени $D = (0.02)^2 \, 70019 \approx 0.03 \left(\delta_{CT} = \frac{3\sqrt{D}}{\sqrt{N}} \right)$. Для профиля Q δ_{CT} =0,025 (на отрезке N = 600,80) D = (0,025) 700/9 \approx 0,045.

§ 3. Повышение скорости сходимости метода

Следующий шаг работы был направлен на уменьшение времени выхода на режим установившегося процесса, за счет повышения

точности приближения на каждом шаге Δt^* . Вновь обратимся к модельному уравнению

$$\frac{df}{dt} = \gamma(f_0 - f) = J. \tag{3.3.1}$$

Используя схему Эйлера с пересчетом, построим итерационный процесс для уравнения (3.3.1) следующим образом:

$$\begin{cases} f^{n+1/2} = f^n + J \frac{\Delta t}{2} \\ f^{n+1} = f^n + J^{n+1/2} \Delta \end{cases}$$
 (3.3.2), (3.3.3)

из (3.3.2) имеем

$$f^{n+1/2} = f^{n} \left(1 - \gamma^{n} \frac{\Delta t}{2} \right) + \gamma^{n} \frac{\Delta t}{2} f_{0}^{n}, \qquad (3.3.4)$$

а из (3.3.3)

$$f^{n+1} = f^n + \left(f_0^{n+1/2} - f^{n-1/2}\right) \gamma^{n+1/2} \Delta t =$$

$$= f^n - f^{n+1/2} \gamma^{n+1/2} \Delta t + f_0^{n+1/2} \gamma^{n+1/2} \Delta t$$
(3.3.5)

из (3.3.4) получаем

$$f^{n} = \frac{f^{n+1/2} - \gamma^{n} \frac{\Delta t}{2} f_{0}^{n}}{1 - \gamma^{n} \frac{\Delta t}{2}},$$

подставляя в (3.3.5), имеем

$$f^{n+1} = \frac{f^{n+1/2} - \gamma^n \frac{\Delta t}{2} f_0^n}{1 - \gamma^n \frac{\Delta t}{2}} - f^{n+1/2} \gamma^{n+1/2} \Delta t + f_0^{n+1/2} \gamma^{n+1/2} \Delta t =$$

$$= f^{n+1/2} - \gamma^{n} \frac{\Delta t}{2} f_{0} - f^{n+1/2} \gamma^{n+1/2} \Delta t \left(1 - \gamma^{n} \frac{\Delta t}{2} \right) + \frac{f_{0}^{n+1/2} \gamma^{n+1/2} \Delta t \left(1 - \gamma^{n} \frac{\Delta t}{2} \right)}{1 - \gamma^{n} \frac{\Delta t}{2}}$$

Пренебрегая членами $0(\Delta t^2)$ малости и раскладывая в ряд

$$\frac{1}{1-\gamma^n \frac{\Delta t}{2}} = \left(1-\gamma^n \frac{\Delta t}{2}\right)^{-1} = 1-\gamma^n \frac{\Delta t}{2} + 0(\Delta t^2),$$

получаем

$$f^{n+1} = f^{n+1/2} \left[1 - (\gamma^{n+1/2} - \gamma^n / 2) \Delta t \right] + \left(\gamma^{n+1/2} - \gamma^n / 2 \right) f_0^{n+1/2} \Delta t.$$
(3.3.6)

Таким образом, процесс можно моделировать так. Делаем перелет

на
$$\dfrac{\Delta t^*}{2}$$
 , запоминаем частоту столкновения $\mathcal{V}_j^{n+1/2}$ и сталкиваем

частицы в соответствии с предыдущей схемой. Затем делаем перелет на Δt^* и в соответствии с (3.3.6) разыгрываем процесс столкновений. Опять выбираем случайное число R_i (распределенное равномерно в интервале от 0 до 1) и меняем скорость і-й частицы в ячейке если

$$\left(v_{j}^{n+1/2}-v^{n}/2\right)\Delta t\geq R_{i}$$

и не меняем, если

$$\left(v_{j}^{n+1/i}-v_{j}^{n+1}/2\right)\Delta t \prec R_{i},$$

где v_j^{n+1} — частота столкновений в ј-й ячейке на n+1 шаге по вре-

мени Δt^* . Параметры схемы выбирались в соответствии с параметрами предыдущей задачи. Итерационная схема, построен-

ная в таком виде, по сути, исключает процесс расщепления по времени Δt^* на перемещение частиц и их столкновения. Таким образом, мы не имеем ограничения для Δt^* по критерию устойчивости. Δt^* в данной работе выбиралось в виде

$$\Delta t^* = \frac{\alpha \mathrm{Kn}}{\sqrt{3RT^*}}.$$
 (3.3.7)

Коэффициент α варьировался от 0,5 до 1. На рис. 3.8 приведена зависимость от количества шагов по времени (Δt^*) для Kn = 1, S = 8, m = 10 в сравнении с предыдущей работой. Здесь хорошо видно, что процесс по времени устанавливается быстрее, чем в предыдущей схеме.

§ 4. Метод Белоцерковского-Яницкого

Вероятностная природа аэродинамики разреженных газов, так важная для применения и разработки численных схем Монте-Карло, естественным образом следует из общих принципов кинетической теории и статистической физики. Приведенные ниже рассуждения также вполне можно рассматривать и как уровни тщательности описания динамики большой молекулярной системы, которые в дальнейшем нам понадобятся для конструирования эффективных методов статистического моделирования.

Как отмечалось во введении, наиболее подробным уровнем описания является динамическая система. Для описания такой системы, состоящей из большого количества элементов N (а молекулярный газ и является такой системой с $N \approx 10^{23}$ молекул), необходимо задать начальные координаты и скорости каждой молекулы (\vec{r}_i, \vec{v}_j) и уравнения эволюции этой системы:

$$m\frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \sum_{i \neq j}^{N} R_{ij} . {(3.4.1)}$$

Решение подобной системы является совершенно нереальной задачей даже для очень разреженного газа: на высоте 400 км (наиболее популярные орбиты для спутников) в одном кубическом сантиметре содержится 10^9 молекул. Поэтому переходят к менее полному – статистическому описанию поведения системы.

Следуя формализму Гиббса, рассматривают не одну систему, а ансамбль систем в 6*N*-мерном Г-пространстве, распределённых в соответствии с *N*-частичной функцией распределения $F(t, \vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N) = F_N$, имеющей смысл вероятности нахождения системы в момент времени t в точке $\vec{r}_1, \vec{r}_2, ..., \vec{r}_N, \vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_N$ в окрестности $d\vec{r}_1...d\vec{r}_N d\vec{v}_1...d\vec{v}_N$:

$$dW = F_N d\vec{r}_1 ... d\vec{r}_N d\vec{v}_1 ... d\vec{v}_N.$$

Подобный ансамбль описывается известным уравнением Лиувилля:

$$\frac{\partial F_N}{\partial t} + \sum_{i=1}^N v_i \frac{\partial F_N}{\partial r_i} + \sum_{i \neq j}^N \sum_{i=1}^N \frac{R_{ij}}{m} \frac{\partial F_N}{\partial v_i} = 0.$$
 (3.4.2)

С этого момента уравнение Лиувилля и все последующие кинетические уравнения, следующие из цепочки Боголюбова, включая последнее ее звено – уравнение Больцмана, имеют вероятностную природу. И хотя уравнение (3.4.2) проще системы (3.4.1), оно учитывает N-частичные столкновения молекул и также чрезвычайно сложно для практического анализа. Переход на менее детальный уровень описания связан с дальнейшим огрублением описания системы с помощью s-частичных функций распределения $F_s = \int F_N d\vec{r}_{s+1} ... d\vec{r}_N d\vec{v}_{s+1} ... d\vec{v}_N$, определяющих вероятность одновременного обнаружения s частиц независимо от состояния остальных N-s частиц. Следуя идеям Боголюбова, получают цепочку зацепляющихся уравнений

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} + \sum_{i=1}^s v_i \frac{\partial F_s}{\partial r_i} + \sum_{i=1}^s \sum_{j \neq i}^s \frac{R_{ij}}{m} \frac{\partial F_s}{\partial v_i} = -\sum_{i=1}^s (N-s) \frac{\partial}{\partial v_i} \int \frac{R_{i,s+1}}{m} F_{s+1} dr_{s+1} dv_{s+1}$$
(3.4.3)

вплоть до одночастичной функции распределения $F_1 = f(t, \vec{r}\;, \vec{\xi}\;)$ газа Больцмана с учетом лишь парных столкновений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{R_{12}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{\xi}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{\xi}} \int \frac{R_{12}}{m} F_2 d\vec{r}_1 d\vec{\xi}_1.$$

Следуя Больцману, будем считать молекулы сферически симметричными и, принимая гипотезу молекулярного хао-са $F_2(t,\vec{r},\vec{v_1},\vec{v_2}) = F_1(t,\vec{r},\vec{v_1})F_1(t,\vec{r},\vec{v_2})$, придем к уравнению (2).

Весьма интересным представляется частный случай уравнения Лиувилля (3.4.2) и цепочки Боголюбова (3.4.3) пространственно-однородного рассмотрения газа, состоящего из ограниченного числа частиц, который на конечном звене, соответствующего двухчастичным столкновениям, приводит к известному уравнению Каца «Master Equation» [7]:

$$\frac{\partial \varphi_1(t, \vec{\xi}_1)}{\partial t} = \frac{N-1}{N} \int \left[\varphi_2(t, \vec{\xi}_1', \vec{\xi}_2') - \varphi_2(t, \vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2) \right] \cdot g_{12} d\sigma_{12} d\vec{\xi}_2. \quad (3.4.4)$$

где φ_1 и φ_2 — одно- и двухчастичные функции распределения. В отличие от уравнения Больцмана, уравнение (3.4.4) является линейным, что и будет использовано при создании и обосновании эффективных численных схем прямого статистического моделирования.

К настоящему времени безусловнный приоритет в динамике разреженного газа принадлежит методу Бёрда, модификации которого трудами отечественных исследователей (см., например, [10]–[21]) позволили буквально на порядки повысить эффективность метода.

Суть метода заключается в том, что эволюция системы на малом промежутке времени Δt расщепляется на два ясных физических процесса: 1) релаксацию в соответствии с оператором столкновений в кинетическом уравнении

$$\frac{\partial f}{\partial t} = J(f)$$
,

2) свободномолекулярный перенос

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\vec{\xi} \nabla f$$
.

Это хорошо известная схема расщепления первого порядка по Δt для любого операторного уравнения, но в данном случае она подкупает тем, что расщепляет динамику такой сложной кинетической системы на два ясных физичеких процесса. Функция распределения моделируется N частицами, которые на первом этапе в каждой ячейке между собой сталкиваются в соответствии с частотой столкновения на протяжении времени Δt , а на втором, в течение Δt , перелетают на расстояния $\vec{\xi}_i \Delta t$.

Центральным местом в методе нестационарного статистического моделирования является процедура подсчета столкновений. Пара частиц выбирается для столкновения в соответствии с частотой столкновений молекул, вне зависимости от расстояния между ними в данной ячейке. Скорости частиц после столкновения выбираются в соответствии с законами взаимодействия молекул. Хотя эффективность метода зависит от довольно многих параметров схемы счета (установления, расщепления по времени, выхода на стационарный режим, шага по времени, сетки по пространству и т.д.), основные работы по совершенствованию метода посвящены улучшению процедуры столкновений и уменьшению статистической погрешности схемы как основного момента, позволяющего уменьшить количество частиц в ячейках и соответственно уменьшить оперативную память вычислительной машины и время расчета. Так, в [18] была предложена модификация процедуры столкновений для одного частного случая - максвелловских молекул, при которой результаты расчета практически не зависят от количества частиц в ячейке при их изменении от 40 до 6. (При обычных расчетах количество частиц в ячейках порядка 30) В [11]-[16] предложен общий метод, не зависящий от сорта молекул, в котором на этапе столкновений подсистема частиц в каждой ячейке рассматривается как N-частичная модель (3.4.4) Каца.

Моделирование столкновения сводится к статистической реализации эволюции не уравнения Больцмана, а модели (3.4.4.) в течение времени Δt . Время столкновения в модели Каца рассчитывается в соответствии со статистикой столкновения в идеальном газе по схеме Бернулли. Эта схема позволяет использовать сущест-

венно меньшее число частиц в ячейке и более мелкий шаг расчетной сетки. Анализ показал, что результаты расчета практически не зависят от количества частиц в ячейке вплоть до 2. Дело в том, что уравнение Больцмана с необходимостью требует предположения о молекулярном хаосе, которое при том количестве частиц в ячейке, на которое способны современные компьютеры, выполняется с систематической ошибкой, уравнение же (3.4.4.) этого не требует, и поэтому этап столкновения рассчитывается как чисто марковский процесс. А с другой стороны, при $N \to \infty$ имеет место полная эквивалентность модели Каца и пространственнооднородного уравнения Больцмана. Таким образом, разработанный Белоцерковским-Яницким подход, во-первых, дает путь построения эффективных численных схем, обеспечивающих возможность решения трехмерных задач аэродинамического обтекания, и, во-вторых, решает важнейшую методологическую задачу эквивалентности численного метода решению кинетического уравнения.

ГЛАВА IV

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ КНУДСЕНА

§ 1. Процедура методов Монте-Карло для моделирования течений разреженного газа и сплошной среды

Исследование задач динамики разреженного газа, как правило, связано с решением кинетических уравнений для функции распределения. Широкое применение методов Монте-Карло в этой области обусловлено, с одной стороны, сложной многомерной структурой кинетических уравнений и с другой, избытком информации, которую заключает в себе функция распределения. Статистическое описание состояния газа позволяет распространить метод Монте-Карло в область сплошной среды, где подобный способ решения является нетрадиционным, менее оправданным, но в какойто мере позволяет установить общий подход к моделированию различных режимов течения.

Рассматривается статистическая процедура моделирования течений газа некоторым набором частиц, совокупность которых определяет состояние среды. Поле течения разбивается на ячейки, частицы размещаются в поле и наделяются рядом признаков, например, массой m, скоростью ξ , координатой x. Для разреженного газа этих признаков достаточно, чтобы при соответствующем количестве частиц N в ячейке охарактеризовать функцию распределения и, осредняя по частицам, определить макропараметры. В области течений, описываемых дифференциальными уравнениями для моментов от функции распределения, частицы, определяющие состояние газа, обладают несколько иным набором признаков ψ , как, например, это делается в методе для уравнений Эйлера. В этом случае скорости частиц в ячейке соответствуют скорости потока, и, кроме того, частицы обладают внутренней энергией ε . По аналогии с кинетической функцией распределения можно рассматривать функцию распределения в виде

$$f \approx \prod_{i=1}^{N} \delta(\xi_i - u) \delta(\varepsilon_i - E),$$

где u и E — скорость и внутренняя энергия газа в ячейке. Тогда определение макропараметров происходит стандартным способом:

$$\Psi = (f, \psi) \approx \frac{1}{N} \sum \psi_i .$$

В течениях газа, описываемых моментными уравнениями более высокого порядка, частицы могут обладать большим набором внутренних признаков P_{ii} , q_i , ...

Траектории частиц, вообще говоря, описываются дифференциальными уравнениями движения

$$m\frac{d\dot{\xi}_{i}}{dt} = \sum_{j} F_{ij}, \frac{d\vec{x}_{i}}{dt} = \vec{\xi}_{i}, \tag{4.1.1}$$

где F_{ij} – сила, действующая на частицу j со стороны частиц i. Эволюция истории частиц во времени происходит в течение последовательности конечных интервалов продолжительности Δt , в течение которых изменяются скорости и внутренние признаки частиц, а затем происходит перенос этих признаков вдоль траекторий.

В разреженном газе силовой член в уравнении (4.1.1) представляет собой парное взаимодействие частиц с соответствующей частотой столкновения ν . Так, для модельного кинетического уравнения, для которого в предыдущей главе разработана соответствующая процедура.

$$\frac{df}{dt} = \nu(f_0 - f). \tag{4.1.2}$$

Пробная частица при увеличении шага по времени на Δt с вероятностью пропорциональной $(1-\nu\Delta t)$ совершает свободный перелет вдоль траектории

$$x_j^{n+1} = x_j^{n+1} + \xi_j^{n+1} \Delta t, (4.1.3)$$

в противном случае ее скорость изменяется в соответствии с равновесной функцией распределения f_0 .

В случае моментных уравнений силовой член в (4.1.1) определяется градиентами макропараметров. Траектории частиц строятся по схеме:

$$\xi_{j}^{n+1} = \xi_{j}^{n1} + \varphi(\bar{\xi})\Delta t, \vec{x}_{j}^{n+1} =$$

$$= x_{j}^{n} + (\xi_{j}^{n} + \xi_{j}^{n+1})\frac{\Delta t}{2}$$
(4.1.4)

изменение внутренних признаков є также обусловлено градиентными членами в соответствующих уравнениях

$$\varepsilon_{i}^{n+1} = \varepsilon_{i}^{n} + \varphi^{n}(\bar{\xi})\Delta t.$$

В случае статистического моделирования, как это делается в настоящей работе, погрешность $\delta \overline{\psi}$ числовых функций в ячейке будет равна

$$\delta \psi \approx O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

При переходе частиц из ячейки в ячейку порядок погрешности необходимо сохранять.

Пусть погрешность вычисления не должна превышать Δt . Хотя точность решения задачи в конечном итоге определяется точностью вычисления макропараметров $\delta \overline{\psi}$, между источниками статистической и детерминистической погрешностей существует взаимное влияние. Поэтому необходимо, чтобы они были одного и того же порядка

$$O(\Delta t) \approx O(\Delta x) \approx O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$
 (4.1.5)

т.е. дискретная траектория частицы не отличалась от истинной на характерном размере течения больше, чем на Δx . Этим объясняется использование схемы второго порядка (4.1.4) в случае сплошной среды. Только в этом случае

$$\delta x^n = O(n^2 \Delta t^2 + (\delta \varphi + \Delta t)).$$

Отсюда следует дополнительное соотношение между количеством шагов по времени и длиной шага

$$n\Delta t \approx O(1). \tag{4.1.6}$$

К этим условиям необходимо добавить условие устойчивости

$$|\xi_j| \frac{\Delta t}{\Delta x} < 1,$$

которое для статистических методов часто заменяют более мягким условием:

$$F = \left\{ \left| \xi_j \right| \frac{\Delta t}{\Delta x} > 1 \right\} << 1. \tag{4.1.7}$$

Поскольку изменение скоростей частиц в разреженном газе происходит мгновенно, в (4.1.3) можно брать схему первого порядка точности.

Таким образом, условия (4.1.5–4.1.7) и схема в виде (4.1.3) или (4.1.4) могут определить вычислительную процедуру. Описанная процедура широко используется для решения задач ДРГ.

Возможности метода для случая сплошной среды проводились на решении задачи о течении между двумя параллельными бесконечными пластинами. В гидродинамическом случае одномерные уравнения записываются в виде

$$\frac{\delta u}{\delta t} = \frac{1}{\rho} \frac{\delta}{\delta y} \mu \frac{\delta u}{\delta y}.$$
(4.1.8)

Моделирование течения можно представить таким образом. После течения разбивается на ячейки, в каждой из которых функция распределения частиц имеет вид:

$$f \approx \prod_{i=1}^{N} \delta(\xi_i - u).$$

Таким образом, частицы с одинаковой массой обладают внутренней энергией и скоростью. Изменение признаков происходит в соответствии с уравнениями (4.1.8).

Из оценки порядка точности поле течения разбивалось на несколько десятков ячеек, проводилось порядка десяти тысяч испытаний.

При решении задачи о течении Куэтта переход частиц из ячейки в ячейку не происходит, релаксация осуществляется в соответствии с уравнением (4.1.8). Результаты решения задачи Куэтта представленны на рис. 4.1.

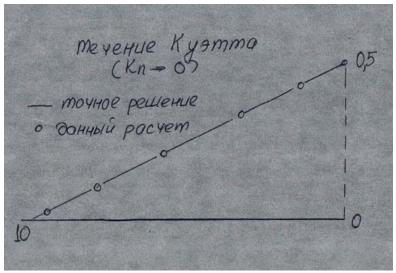


Рис. 4.1

§ 2. Метод «релаксация – перенос» для решения задач динамики газа в широком диапазоне разреженности среды

(Коган, Кравчук, Хлопков, Х[83]

При решении задач динамики газа, описываемых кинетическим уравнением

$$\frac{\delta f}{\delta t} = -\xi \nabla f + J(f) \tag{4.2.1}$$

обычно разделяют процесс решения на два независимых этапа на малом интервале.

Первый этап – этап переноса:

$$\frac{\delta f}{\delta t} = -\xi \nabla f. \tag{4.2.2}$$

Второй этап – этап релаксации:

$$\frac{\delta f}{\delta t} = J(f). \tag{4.2.3}$$

Оба этапа обладают ясным физическим смыслом — это бесстолкновительный перенос частиц и пространственно - однородная релаксация. Этот прием, например, успешно применяется в методе прямого статистического моделирования.

В данной работе используется схема решения для моментного представления кинетического уравнения. В этом случае существенно упрощается наиболее сложная часть решения кинетических задач - вычисление интеграла столкновений. Функция распределения рассматривается в некоторой аппроксимационной форме

$$f = F(\xi, M^{(0)}, ..., M^{(k)}),$$
 (4.2.4)

где $M^{(k)}$ – кинетический момент k-й степени. Подобное представление обладает целым рядом удобств в конкретной реализации. Так, на этапе релаксации (4.2.3) можно перейти на макроуровень описания явления. Ограничившись рассмотрением моментов третьего порядка, для максвелловских молекул получим систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{\delta M^{(k)}}{\delta t} = \alpha M^{(k)}, M^{(j+1)} = M^{(j+1/2)} (1 + \alpha \Delta t), \tag{4.2.5}$$

где M^j и $M^{j+1/2}$ — моменты после этапа релаксации и переноса соответственно, коэффициент $\alpha=0$, для уравнений, содержащих концентрацию n, среднюю скорость u и температуру T в ячейке;

$$lpha=rac{-1}{ au_P}$$
, для элементов тензора напряжений P_{ij} ; $lpha=rac{-2}{ au_P}$, для компонентов теплового потока q_i , где au_P —

время релаксации.

Этап переноса можно осуществить на уровне аппроксимационной функции распределения с моментами, взятыми из предыдущего шага.

Выбор функции распределения (4.2.4) зависит от физических особенностей рассматриваемой задачи. Так, например, в сильно разреженных течениях, где определяющие явления — граничные условия, удобно выбирать (4.2.4) в виде разрывной по направлениям функции. В течениях, близких к сплошной среде, удобнее брать

непрерывную функцию распределения в виде разложения по малому параметру.

Расчетная схема строится следующим образом. Определяется поле течения, на границах задается вид функции распределения, внутри течения выбирается аппроксимационная функция распределения (4.2.4). Поле течения разбивается на ячейки размером Δx . Выбирается интервал времени $\Delta \tau$, в течение которого процесс расщепляется на два этапа: свободный перелет (4.2.2) и однородную релаксацию (4.2.3).

Погрешность метода δ определяется тем, насколько удачно выбрана аппроксимационная функция распределения (4.2.4). Что касается численной схемы, то она является схемой первого порядка точности $\delta = o(\Delta t, \Delta x)$, это необходимо учитывать при аппроксимации пространственных производных конечными разностями и соблюдении условия устойчивости $|\xi| \cdot \frac{\Delta t}{\Delta \chi} \leq 1$.

Этап переноса (4.2.2), в зависимости от сложности и размерности задачи, можно выполнить как на уровне макропараметров, так и на уровне функции распределения. В одномерных задачах этап переноса удобно проводить на уровне моментов, интегрируя (4.2.2) с соответствующими весами. Для двух- и трехмерных задач существенно будет сказываться сложность и нелинейность моментных уравнений переноса, поэтому в этом случае эффективно решать непосредственно линейное уравнение (4.2.2). Это можно сделать, например, решая в каждой ячейке систему линейных конечно-разностных уравнений для набора дискретных ординат, либо моделируя процесс переноса методом Монте-Карло.

На этапе релаксации, при аппроксимации функции распределения (4.2.4) непрерывной функцией, как, например, это делается в классическом методе Грэда, сразу получаются значения моментов (4.2.5). Во всех других случаях, например, для аппроксимации Лиса, сталкиваемся с обращением системы алгебраических уравнений.

Апробацию метода проведем на задаче о течении и теплопередаче между бесконечными параллельными пластинами. Задача ставится обычным образом. Начало координат выбирается на одной из пластин. Ось X перпендикулярна пластинам. Скорости и температуры пластины соответственно $u_{W1,2}, T_{W1,2}$. Аппроксимационная форма функции распределения выбирается в двух видах. В

форме двухпоточного максвелловского распределения, так называемой аппроксимации Лиса и тринадцатимоментной аппроксимации Грэда, обезразмеривание осуществляется по параметрам на одной из границ, тогда уравнение Больцмана функции распределения:

Лиса –
$$f^{\pm} = \frac{n^{\pm}}{(\pi T^{\pm})^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{T^{\pm}}\right),$$
 (4.2.6)

Грэда -

$$f = \frac{n}{(\pi T)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{T}\right) \left\{ 1 + \frac{P_{ij}}{PT} C_i C_j - \frac{4q_i}{PT} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{C^2}{T}\right) G \right\}. \tag{4.2.7}$$

Так как задача одномерна, то перенос легко сделать на уровне макропараметров.

Этап свободного перелета (4.2.2) для аппроксимации Лиса (4.2.6):

$$(n^{\pm})_{i}^{j+1/2} - (n^{\pm})_{i}^{j} = \pm \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} ((n^{\pm}\sqrt{T^{\pm}})_{i\pm 1}^{j} - (n^{\pm}\sqrt{T^{\pm}})_{i}^{j}),$$

$$(n^{\pm}\sqrt{T^{\pm}})_{i}^{j+1/2} - (n^{\pm}\sqrt{T^{\pm}})_{i}^{j} =$$

$$= \pm \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{5\sqrt{\pi}}{4} ((n^{\pm}(T^{\pm})^{2})_{i\pm 1}^{j} - (n^{\pm}(T^{\pm})^{2})_{i}^{j}).$$

Для аппроксимации Грэда соответствующие уравнения переноса получаются интегрированием разностного уравнения

$$\frac{f_{i}^{j+1/2} - f_{i}^{j}}{\Delta t} = |\xi_{x}^{\pm}| \frac{f_{i\pm 1}^{j} - f_{i}^{j}}{\Delta x}$$

с соответствующими весами $\, \varphi\! \left(\xi \right) \,$ для соседних ячеек, где

$$\varphi(\xi) \in \{1, \xi_x, \xi_x^2, \xi_y, \xi_x \xi_y, \xi^2, \dots\},\$$

$$\begin{split} & \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_i^{j+1/2} \varphi d\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_i^{j+1/2} \varphi d\xi + \\ & + \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{i-1}^{j} \xi^{+} \varphi d\xi + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{i-1}^{j} \xi \vec{v} \varphi d\xi + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_i^{j} |\xi^{\pm}| \varphi d\xi \right) \frac{\Delta t}{\Delta x}. \end{split}$$

По результатам переноса определяются данные для этапа релаксации:

$$\begin{split} n_{i}^{j+1} &= n_{i}^{j+1/2}, \quad u_{i}^{j+1} = u_{i}^{j+1/2}, \quad p_{i}^{j+1} = p_{i}^{j+1/2}, \\ p_{xy_{i}^{j+1}} &= p_{xy_{i}^{j+1/2}} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\pi}}{Kn} n_{i}^{j+1/2} \Delta t \right), \\ q_{x_{i}^{j+1}} &= q_{x_{i}^{j+1/2}} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{\sqrt{\pi}}{Kn} n_{i}^{j+1/2} \Delta t \right), \end{split} \tag{4.2.8}$$

и можно переходить к этапу переноса.

Для восстановления двухпоточной функции распределения на j+1 шаге необходимо решить систему алгебраических уравнений относительно n^\pm, u^\pm, T^\pm в каждой ячейке. Например, в случае теплопередачи получим систему

$$n = \frac{1}{2}(n^{+} + n^{-}),$$

$$nT = \frac{1}{2}(n^{+}T^{+} + n^{-}T^{-}),$$

$$q_{X} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}(n^{+}(T^{+})^{3/2} + n^{-}(T^{-})^{3/2}),$$

которая решается методом последовательных приближений.

Используя тринадцатимоментную аппроксимацию, можно решать задачи динамики газа с помощью метода Монте-Карло. Для этого в соответствии с функцией распределения разыгрываются скорости частиц и их координаты, затем частицы переносятся за

время $\frac{\Delta t}{2}$: $x^{j+\frac{1}{2}} = \xi \cdot \frac{\Delta t}{2} + x^j$. Границы следует учитывать особо.

Далее, зная скорости и координаты частиц после этапа переноса, вычисляем n,u,T,q_x,p_{ij} для каждой ячейки и производим релаксацию (4.2.8). Получив данные после релаксации, строим новую функцию распределения (4.2.7) для каждой ячейки и в соответствии с ней, разыграв скорости и координаты, делаем перенос и т.д.

В работе [83] на примерах решения задачи о теплопередаче при различных числах Кнудсена (∞ , 10, 1, 0.5, 0.1, 0.01, 13 – моментное приближение,

NS – приближение, невязкий предел – Kn = 0) и различных отношениях температур ($T_{W2}/T_{W1}=4$, $T_{W2}/T_{W1}=16$) проводится сравнение с результа-

тами Черемисина, Власова, Лю и Лиса.

Как и следовало ожидать, для Kn>0.1 получено хорошее совпадение с результатами работы $\mathit{Лю}\ u\ \mathit{Лисa}$ для двухпоточной аппроксимационной функции (4.2.6). Для этой аппроксимации хорошее совпадение получено и с точным численным решением уравнения Больцмана. При меньших лучшее совпадение с результатами работы дает 13-моментная аппроксимация, которая совсем плохо работает при больших Kn. В частности, при стремлении Kn к свободномолекулярному пределу ошибка по температуре превышает 50%. Рассмотрение аппроксимации с моментами четвертого порядка приводит к незначительному уменьшению ошибки. Это объясняется тем, что таким образом невозможно аппроксимировать разрывную функцию распределения.

В заключение следует сделать вывод, что по предложенной методике, при соответствующем выборе аппроксимационной функции, можно эффективно решать задачи динамики разреженных газов при произвольных числах Кп. В частности, метод позволяет моделировать и течения сплошной среды, где вид функции распределения известен точно (Максвелл, Навье-Стокс...). Так, случаи подобного подхода моделирования сплошной среды описаны в работах Четверушкина, Елизаровой, Павлова, Абалкина, Волчинской, Пуллина [81, 107–110].

Моделирование уравнения сплошной среды на уровне функции распределения в ряде случаев будет более удобно, поскольку заменяет сложную нелинейную систему уравнений в частных производных простым линейным уравнением свободномолекулярного перелета частиц из ячейки в ячейку.

§ 3. Моделирование течений невязкого идеального газа

Как уже упоминалось выше, этап переноса можно проводить на уровне функции распределения. Моделируемую среду можно заменить системой N частиц, которые распределены в начальный момент времени в ячейках неподвижной эйлеровской сетки со скоростями, которые моделируются с помощью функции распределения в данной ячейке. Следуя методу, описываемому в работе [74], будем моделировать перенос частиц, скорости которых распределены в соответствии с максвелловской функцией распределения. На этапе переноса частицы перелетают по траекториям без столкновений друг с другом, взаимодействуя только с границами. Во время релаксации происходят столкновения частиц. На этом этапе функция распределения частиц становится максвелловской. Таким образом, навязывая функцию распределения для этапа переноса, можно моделировать естественный процесс. Ниже рассмотрено применение метода для одно- и двухмерных задач. Кроме того, в качестве примера учета различных эффектов оценено влияние вращательных степеней свободы. Предполагается, что температура вращательных степеней свободы равна температуре поступательных степеней свободы. Т. е. на этапе релаксации происходит полный обмен энергии между степенями свободы. Энергия, приходящаяся на вращательные степени свободы, равна $e = \frac{\gamma T}{4}$, где

$$\gamma = \frac{5 - 3\nu}{\nu - 1}$$
 — число внутренних степеней свободы.

Методы статистического моделирования обладают преимуществом и удобством по сравнению с конечно-разностными методами в постановке граничных условий. Граничные условия ставятся на уровне функции распределения. Это дает возможность решать задачи обтекания тел сложной конфигурации, применяя прямоугольную сетку. Описываемый здесь метод обладает еще и тем преимуществом, что нет необходимости запоминать скорости и координаты всех частиц. Достаточно помнить лишь макропараметры в ячейках.

Общая постановка задачи. Поле течения $\Omega(t)$ с границей $\partial \Omega(t)$ разбивается на ячейки размером $\Delta \vec{x}$. Время рассматривается дискретным:

$$t_j < t < t_{j+1}$$
, $t_j = j\Delta t$.

Выбор Δt , $\Delta \vec{x}$ будет обсуждаться при решении конкретных задач.

- 1. Розыгрыш скоростей $\vec{\xi}_n$ и координат частиц $\vec{x}_n (0 \le n \le N_i^j)$ в соответствии с макропараметрами N_i^j , u_i^j , T_i^j и максвелловской функцией распределения.
- 2. Перенос частиц $\vec{x}_n^{\,j+1} = \vec{\xi}_n^{\,j} \Delta t + \vec{x}_n^{\,j}$. Если частица сталкивается с границей $\Omega(t)$, то необходимо учитывать это взаимодействие.
- 3. Учет, если необходимо, входящих в $\Omega(t)$ и выходящих из области $\Omega(t)$ частиц.
- 4. Определяется номер ячейки, в который перелетела частица.
- 5. К макропараметрам в этой ячейке прибавляются параметры перелетевшей частицы:

6.

$$\begin{split} &U_{i}^{j+1/2} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \xi_{i,n}^{j+1/2}, E_{i}^{j+1} = E_{\bullet}^{j+1/2} + E_{\text{oop},i}^{j+1/2}, \\ &E_{\bullet}^{j+1/2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} (\xi_{i,n}^{j} - U_{i}^{j+1/2})^{2}, p_{i}^{j+1} = \frac{4}{3+\nu} \frac{E_{i}^{j+1}}{N_{i}^{j}}, \\ &E_{\text{oop}} = \sum \frac{vT_{ij}}{4}. \end{split}$$

- 7. Подсчет осредненных макропараметров, набор статистики в стационарных задачах.
- 8. Возврат к пункту 1.

Следует отметить, что описанный алгоритм является консервативным относительно массы, импульса и энергии при условии соблюдения консервативности на этапе розыгрыша скоростей частиц. Здесь применяется алгоритм, консервативный по отношению к средней скорости и энергии.

Задача о движении поршня в невязком идеальном газе. Задача решается для одноатомного и двухатомного газа. В работе [81] во время счёта запоминаются координаты всех частиц, что естественно ограничивает область применимости метода. При решении задач методом, описываемым в данном параграфе, нет необходимости запоминать координаты частиц. Это позволяет применять данный метод для решения двух- и трехмерных стационарных и нестационарных задач. Розыгрыш координат частиц в данной работе производится в соответствии с первой производной концентрации частиц, в соответствии с функцией

$$f = \frac{n_{i+1} - n_{i-1}}{2(n_{i+1} + n_{i-1})}(x - 0.5) + 1,$$

 $0 \le x \le 1$, x — координата внутри ячейки.

Рассматривается одномерная нестационарная задача формирования и движения скачка перед поршнем, движущимся с постоянной скоростью. Задача решается для двухатомного газа ($\nu=2$) и для одноатомного газа ($\nu=0$). В начальный момент времени t=0 поршень находится в x=0 и мгновенно приобретает скорость $u_p>0$.

В момент времени t=0 газ в области невозмущен ($\vec{u}_i=0,\,\vec{T}_i=0$). Перед поршнем образуется ударная волна, которая двигается со скоростью $u_s>u_p$. Область возмущения находится между поршнем и ударной волной, поэтому область течения можно ограничить и считать, что в точку x=1 возмущение не доходит. Задача имеет точное решение:

$$U_p = \frac{\sqrt{\gamma}}{2} \left(M_s - \frac{\frac{\gamma - 1}{2} M_s^2}{\sqrt{\frac{1}{\gamma M_s^2} - \frac{\gamma - 1}{2}}} \right) \frac{\sqrt{2(\gamma - 1)(M_s^2 - 1)(1 + \gamma M_s^2) + 1}}{(\gamma + 1)^2 M_s^2}$$

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{M_s^2 - 1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2}M_s^2} + 1, \qquad \frac{T_1}{T_2} = \frac{2(\gamma - 1)(M_s^2 - 1)(1 + \gamma M_s^2)}{(\gamma + 1)^2 M_s^2}, \qquad \qquad \frac{p_1}{p_2} = \frac{2\gamma(M_s^2 - 1)}{\gamma + 1} + 1.$$

Для обеспечения условия непротекания $u_n=0$ в методе Монте-Карло условие отражения частиц от поршня и в x=1 следует принять зеркальным, т. е.

$$\xi_n^i = 2u_p - \xi_n(x = x_p); \xi_n^i = -\xi_n, (x = 1).$$

При решении данной задачи область течения $x\in(0,1)$ делилась на 40 ячеек. В момент t=0 в каждой ячейке находилось 200 частиц. Задача решена для $\gamma\in\{\frac{5}{3};1;4\}$ и чисел $M_s=\{2,3;3,0;7,0\}$.

В задачах, описываемых уравнением Эйлера размеры ячеек можно выбирать произвольным образом. Выбор Δx зависит от того, какую точность решения нужно получить (на сколько ячеек в данной задаче «размажется» ударная волна). Шаг по времени определяется

так, чтобы
$$p = \frac{\Delta t}{\Delta x} u_S \approx 1.$$

Результаты представлены на рис. 4.2. Для обеспечения приемлемой точности достаточно условия

$$p \le 1$$
.

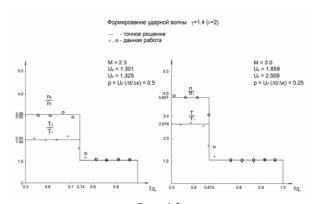


Рис. 4.2

Течение в сопле Лаваля. В случае, если макропараметры изменяются мало вдоль сечения, а скорость направлена практически вдоль сопла, задача может быть сведена к одномерной. (Данный факт действительно имеет место, т. к. площадь сечения изменяется медленно по длине сопла). Форма сопла выбрана в следующем виде: $S = 1 - (1 - S_{rh}) Sin \ \pi \ x$, где $S_{\kappa p}$ – критическое сечение.

$$S_{hp} = \frac{M\left(\frac{\gamma + 1B}{2}\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}}{\left(1 + \frac{\gamma + 1B}{2}M_s^2\right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}}.$$

Моделируется расчетный режим течения в сопле. Функция распределения частиц, влетающих в сопло:

$$f = \frac{n}{(\pi T)^{\frac{3}{2}}} \cdot \xi_x \exp\left(-\frac{c^2}{T}\right).$$

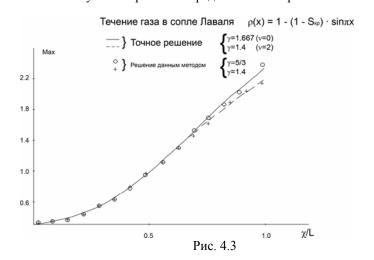
Макропараметры обезразмериваются из условия на ∞ . Концентрации n=1 соответствует $N_*=50$ частиц в ячейке. Поле течения разбито на 30 ячеек. Для учета формы сопла предлагается не использовать факт столкновения частиц со стенками, т. к. при этом задача превратится в двухмерную. Задаче можно интерпретировать течение внутри трубы постоянного сечения с пористыми стенками. Вдувом и отсосом через стенки этой трубы можно сформировать такое же течение $(n(x), \vec{u}(x), T(x))$, какое реализуется в сопле Лаваля данной геометрии S(x). Ясно, что необходимо вдувать N_i (1-S(x)) частиц, где N_i – количество частиц в i -й ячейке.

В данном методе это реализуется следующим образом. Вводится «вес» частицы, аналогично введенному Бердом. Тогда подсчет макропараметров производится следующим образом:

$$\begin{split} N_{i}^{j+1/2} &= \sum_{n} \frac{S_{is,n}}{S_{i,n}} = \sum_{n} W_{n}, \\ \vec{u}_{i}^{j+1/2} &= \frac{1}{N_{i}^{j+1/2}} \sum_{n} \vec{\xi}_{n} W_{n}, \\ Eu_{\bullet, "-\square}^{j+1/2} &= \frac{1}{2} \sum_{n} (\vec{\xi}_{i,n} - \vec{u}_{i}^{j+1/2}) W_{n}, \\ E_{\text{cop}} &= \sum_{n} \frac{\gamma T_{is}}{4} \cdot W_{n}, \\ E_{i}^{j+1/2} &= E_{\bullet, "-\square}^{j+1/2} + E_{\text{cop}}^{j+1/2}, \\ p_{i}^{j+1} &= \frac{4}{3+\gamma} \frac{E_{i}^{j+1}}{N_{i}^{j+1/2}}, \end{split}$$

где $W_N = \frac{S_{is,n}}{S_{i,n}}\,,\; S_{is}$ – сечение в той ячейке, где частица

была до перелета; S_i — соответственно после перелета. Результаты расчетов представлены на рис. 4.3.



ГЛАВА V ИССЛЕДОВАНИЕ СЛАБО ВОЗМУЩЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

Многие явления динамики разреженного газа, имеющие практическое и методологическое значение носят слабо неравновесный характер и описываются линеаризованным кинетическим уравнением. К ним относится большинство задач о течениях в тонких пристеночных слоях, движении тел в газе с малыми скоростями, определении коэффициентов переноса и граничных условий для течений сплошной среды и другие. К таким задачам сводятся и существенно неравновесные течения, когда основные параметры течения известны из каких-либо других соображений, и определяются малые отклонения от этих решений. Именно для таких задач и были разработаны методы, предложенные во II главе и применяемые здесь для решения ряда практических задач.

§ 1. Определение скорости скольжения

Как известно, разложение Гильберта—Энскога—Чепмена дает решения, асимптотически сходящиеся к решению уравнения Больцмана при числах Кнудсена стремящихся к нулю. Однако вблизи границ при сколь угодно малом числе Кнудсена имеется область, в которой этот ряд не представляет решения уравнения Больцмана. Толщина этой области, названной слоем Кнудсена, порядка длины пробега λ . Рассмотрим течение газа, находящегося над твердой плоской стенкой, при наличии градиента массовой скорости, который вдали от стенки принимается постоянным. Выберем систему координат, как это показано на рис. 5.1, где NS — область течения Навье—Стокса, K — область Кнудсена.

Целью данной работы является установление таких фиктивных макроскопических граничных условий для уравнений Навье—Стокса на твердой стенке, при выполнении которых решение уравнений Навье—Стокса вне кнудсеновского слоя совпадало бы (с точностью навье-стоксовского приближения) с решением уравнения Больцмана с заданными истинными кинетическими условиями на стенке.

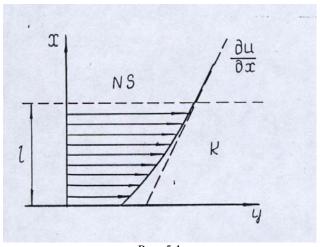


Рис. 5.1

Для простоты примем на поверхности тела для молекул, летящих вверх, диффузный закон отражения

$$f_{00} = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2 k T_0} \xi^2\right). \tag{5.1.1}$$

На бесконечности (практически на расстоянии длины пробега) задается навье-стоксовская функция распределения

$$f = f_0 \left[1 + \frac{P_{xy}}{2\rho} \frac{m}{2kT} C_x C_y \right] f_0 = f_{00} \left[1 + 2C_y u(x) h_0 \right]$$

$$\overline{C} = \overline{\xi} - \overline{u}, P_{xy} = -\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{\infty}, h_0 = \frac{m}{2kT_0}.$$
(5.1.2)

Внутри кнудсеновского слоя функция распределения имеет вид $f = f_{00}[1 + 2h_0\xi u(x) + \varphi(x,\xi_{\mathcal{X}},\xi_{\mathcal{X}})]. \tag{5}$

$$f = f_{00}[1 + 2h_0\xi u(x) + \varphi(x, \xi_{\chi}, \xi_{\chi})].$$
 (5.1.3)

Для решения этой задачи воспользуемся методом, разработанным в § 1 гл. II.

Как видно из (5.1.2), в верхнее граничное условие входит значение массовой скорости, величину которой в первом приближении можно задавать произвольно. Здесь использовался удобный алгоритм нахождения массовой скорости на верхней границе

(*Хлопков* [98]). Разобьем поле течения на слои. Предполагая, что вблизи верхней границы профиль скорости входит на заданный навье-стоксовский градиент $(\partial u/\partial x)_{\infty}$, зададим массовую скорость на верхней границе по формуле

$$u_i^{(n)} = u_{i-1}^{(n-1)} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{\infty} \Delta x, \tag{5.1.4}$$

где i — номер слоя на верхней границе, Δx — толщина слоя, n — номер приближения.

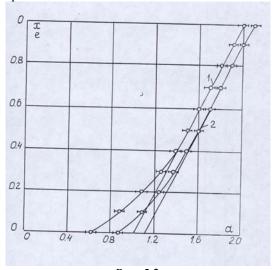


Рис. 5.2

На рис. 5.2 показаны профили безразмерной скорости. Цифрой 1 обозначен профиль скорости для псевдомаксвелловских молекул, взятый из работы (Горелов, Коган, [102]) (коэффициент скольжения равен 1,015), цифрой 2 обозначен профиль скорости для твердых сфер, полученный в работе (Хлопков, [98]) (коэффициент скольжения равен 1,103). Как известно, максвелловские молекулы и твердые сферы представляют собой два крайних случая потенциалов взаимодействия молекул. Поэтому естественно предположить, что результаты для молекул со всеми другими потенциалами взаи-

модействия будут находиться в промежуточной области между полученными значениями.

В связи с техническими сложностями экспериментального моделирования течений в слое Кнудсена. численный расчет долгое время являлся единственным источником информации о структуре слоя. Отметим, что поставленный за рубежом спустя несколько лет эксперимент по определению скорости скольжения (Reynolds M.A., Smoldern J.J., Wendt J.F., [103]) подтвердил полученные в данной работе результаты.

§ 2. Решение задачи о слабом испарении (конденсации) с плоской поверхности (Коровкин, Хлопков [104])

С помощью метода Монте-Карло, разработанного в работе (Власов, Хлопков [99]) для линейных задач молекулярной газовой динамики, и решается задача о вычислении скачка температуры в слое Кнудсена, при наличии на стенке конденсации или испарения. Подобные задачи решались и ранее либо путем решения функции распределения, либо путем решения модельного уравнения. Цель настоящей работы — развитие линейной кинетической теории конденсации и испарения при малых числах Кнудсена. При этом оригинальным методом, позволяющим экономить машинную память, решается линеаризованное уравнение Больцмана. Вдали от границы раздела фаз справедливы уравнения Навье-Стокса. Кинетическое описание пограничной зоны определяет, таким образом, условия физического сопряжения навье-стоксовской области с границей фазового перехода.

Напомним суть метода. Пусть размер ячейки равен Δy , тогда вероятность столкновения в этой ячейке равна $\sigma_0 n \Delta t$, где $\Delta t = \Delta y / \left| \xi_y \right|$ — время пребывания пробной молекулы в этой ячейке. Вероятность того, что данная молекула влетит в ячейку со скоростью $\vec{\xi}$, пропорциональна $\left| \xi_y \right| f(\vec{\xi})$. Тогда вероятность столкновения пробной молекулы в этой ячейке пропорциональна

$$|\xi_{y}| f \sigma_{0} n\Delta t = |\xi_{0}| f \sigma_{0} n \frac{\Delta y}{|\xi_{y}|} \sim f(\vec{\xi}), \tag{5.2.1}$$

а вероятность того, что частица, сталкивающаяся с пробной частицей, имеет скорость $\vec{\xi}$, также пропорциональна $f(\vec{\xi})$. Следовательно, счет можно вести таким образом: в ячейке, в которой происходит столкновение, запоминать скорость, с которой частица влетает в эту ячейку, а расчет столкновения производить со скоростью, запомненной от предыдущего столкновения.

Постановка задачи. В системе координат (x,y) рассматривается установившаяся конденсация (испарение) на поверхности y=0. Движение газа к поверхности (или от нее) осуществляется с макроскопической скоростью $\vec{u}=(0,\vec{u},0)$ (движение газа вдоль поверхности отсутствует). Так как рассматривается процесс с малой степенью неравновесности, процесс конденсации-испарения будет "медленным", т.е. $u/C_W=\widetilde{u}<<1$, где $C_W=\left(m/2kT\right)^{-1/2}$, и, следовательно, в пределах слоя допустима линеаризация функции распределения и гидродинамических параметров.

$$f = f_0(1 + \varphi(y, \xi)),$$

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k T_0}\right)^{-3/2} \exp\left(-\frac{m\xi^2}{2k T_0}\right)$$

$$T = T_0(1 + \tau(y)), n = n_0(1 + \nu(y)),$$
(5.2.3)

где f_0 – равновесная функция распределения, $T_0 = T_W$ – температура поверхности, $n_0 = n_W$, соответствующая ей равновесная плотность, $\varphi(y,\vec{\xi})$, $\tau(y)$, $\nu(y)$ – малые добавки, квадратами которых можно пренебречь ($\varphi(y,\vec{\xi})$ <<1, $\tau(y)$ <<1, $\nu(y)$ <<1).

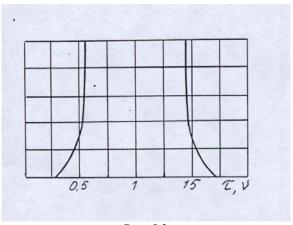


Рис. 5.3

Будем полагать, что молекулы газа взаимодействуют с поверхностью согласно следующей модели. Пусть на поверхность y = 0падают молекулы с интенсивностью $J_{\scriptscriptstyle -}$. Пусть часть $a_{\scriptscriptstyle W}$ из падающих молекул "поглотится" стенкой, а часть $(1 - a_W)$ отразится поверхностью диффузно с температурой поверхности $T_{\scriptscriptstyle W}$. Кроме этого, поверхность испаряет частицы газа с интенсивностью J_{\perp} , которая, как показывают многочисленные эксперименты, зависит лишь от свойств материала поверхности и ее температуры, также диффузно с температурой T_0 . Коэффициент a_w определяется экспериментально. Рассмотрим вначале частный случай $a_{W} = 1$, т.е. когда все падающие на поверхность молекулы поглощаются. В работе предложен простой способ пересчета полученных таким образом результатов на общий случай. Такой подход позволяет сократить счет ввиду сокращения параметров задачи. На верхней границе слоя Кнудсена функция распределения принимает навье-стоксовский вид (рис. 5.3).

§ 3. Медленное движение сферы в разреженном газе (броуновское движение)

Результаты экспериментального измерения сопротивления сферы в потоке разреженного газа с малой скоростью были опубликованы *Милликеном* еще в 1923 году, однако только с середины 60-х годов стали делаться попытки теоретического исследования сопротивления сферы в переходной области, простирающейся от сплошносредного до свободномолекулярного режимов. Для обоих пределов имеются аналитические выражения силы сопротивления.

В первом случае сила сопротивления дается теорией Стокса. Считается, что число Маха M стремится к нулю быстрее, чем число Кнудсена Kn; это обеспечивает условия существования предположения Стокса о малости числа Рейнольдса Re:

$$Re = \frac{M}{Kn} \to 0. \tag{5.3.1}$$

Как известно, в этом случае теория Стокса для диффузного отражения молекул от поверхности сферы (условие прилипания) дает значение силы сопротивления равное $6\pi\mu Ru$, а для зеркального отражения (условие равенства нулю тангенциального импульса) значение $4\pi\mu Ru$, где R – радиус сферы, μ – вязкость, u – скорость набегающего потока.

Во втором случае, при $Kn\sim\infty$, значение силы сопротивления дается формулой свободномолекулярного обтекания сферы. Переходя к пределу при $u\to\infty$, получаем

$$F_{0\rho} = \rho_{\infty} \frac{\pi R^2 u^2}{2S} \left[\frac{16}{3\sqrt{\pi}} + \frac{2}{3}\sqrt{\pi} \right]$$
 (5.3.2)

для диффузного отражения,

$$F_{03} = \rho_{\infty} \frac{\pi R^2 u^2}{2S} \frac{16}{3\sqrt{\pi}}$$
 (5.3.3)

для зеркального отражения.

Для вычисления сопротивления в переходной области необходимо решать уравнение Больцмана, что сопряжено со значительными трудностями математического порядка, связанными, с одной стороны, со сложным видом интеграла столкновений и с другой стороны – с многомерностью задачи. Поэтому все попытки

решения кинетического уравнения ограничивались либо аппроксимацией функции распределения, либо анализом уравнения Крука. Особо следует отметить работу Черчиньяни с сотрудниками, в которой вариационным методом для модельного уравнения Крука вычисляется сопротивление сферы во всей области течения от сплошносредного до свободномолекулярного. Отражение молекул от сферы в работе Черчиньяни считалось диффузным. Расчет показал хорошее соответствие с экспериментальными данными Милликена.

В данной работе сопротивление сферы находится с помощью решения уравнения Больцмана методом Монте-Карло (*Хлопков*, [105]).

Постановка задачи. Для достижения указанной цели рассмотрена сфера радиуса R в начале прямоугольной системы координат. Поле течения ограничивалось кубом с центром в начале координат и стороной 10 калибров. Ввиду симметрии задачи бралась только верхняя половина течения, а на плоскости y=0 задавался зеркальный закон отражения молекул. На бесконечности (на гранях куба) задавалась равновесная функция распределения с параметрами на бесконечности n_{∞} , u_{∞} , T_{∞} , а закон отражения молекул от поверхности сферы брался либо зеркальным, либо диффузным с температурой, равной температуре на ∞ :

$$f_W = n_W \left(\frac{m}{2\pi k T_\infty}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m}{2k T_\infty}\xi^2\right).$$
 (5.3.4)

Число Кнудсена вводится обычным образом:

$$Kn = \frac{\lambda_{\infty}}{R}.$$
 (5.3.5)

Цепь Маркова представляет собой блуждание пробной молекулы на равновесной функции распределения:

1⁰. Скорость влетающей с границы молекулы распределена пропорционально

$$e^{-v^2}(v_n)$$
. (5.3.6)

 2^{0} . Время свободного пролета τ разыгрывается с вероятностью

$$e^{-k\tau}K_0d\tau, (5.3.7)$$

где

$$K_0 = a \int g \ e^{-\nu_1^2} d\nu_1 \,. \tag{5.3.8}$$

3°. Скорость после столкновения пропорциональна

$$e^{-v_1^2}g$$
. (5.3.9)

Искомый функционал – сила сопротивления:

$$F_{x} = m \int v_{z}(v_{n}) f_{0} \varphi \, dv \, ds \,, \tag{5.3.10}$$

где интегрирование ведется по всей поверхности сферы, оценивается как среднее арифметическое от случайной величины $h = m v_x(v_n)$ в точках поверхности сферы.

Результаты расчета силы сопротивления отнесенной к свободномолекулярному значению от числа Kn представлены на рис. 5.4.

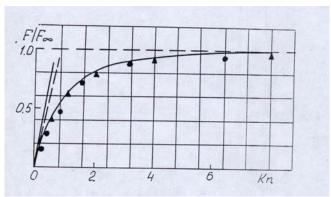


Рис. 5.4

§ 4. Коэффициент диффузии и среднее смещение броуновской частицы в разреженном газе (*Хлопков* [106])

Явление хаотического движения мелких, взвешенных в жидкости, частиц послужило источником ряда работ Эйнштейна, в которых он получает формулы для коэффициента диффузии D и среднего смещения $\lambda_{\mathbf{x}}$:

$$D = \frac{kT}{K},\tag{5.4.1}$$

$$\lambda_x = \sqrt{2Dt} \,, \tag{5.4.2}$$

здесь k – постоянная Больцмана, T – температура жидкости, K – коэффициент пропорциональности, t – время.

Основным предположением считается малая скорость движения частицы, откуда сопротивление среды F прямо пропорционально скорости частицы ν :

$$F = Kv. (5.4.3)$$

Для получения конкретных значений коэффициента диффузии и среднего смещения необходимо знание величины коэффициента K. Вслед за Эйнштейном коэффициент пропорциональности обычно находят из формулы Стокса, предполагая шарообразность частиц,

$$F_{\rm cm} = 6\pi\mu R v, \tag{5.4.4}$$

где μ — вязкость жидкости, R — радиус частицы. Однако при движении мелких частиц в газах существенно нарушаются гидродинамические условия, при которых была выведена формула. Впервые на это обратил внимание *Смолуховский*, проводя грубые оценки коэффициента K для случая больших длин пробега молекул газа λ . Основной работой по уточнению коэффициента K на случай разреженности среды, несомненно, является экспериментальная работа *Милликена*. Для интерполяции своих экспериментальных данных Милликен предложил полуэмпирическую формулу

$$F = F_{\rm cm} \left(1 + A \frac{\lambda}{R} \right),^{-1} \tag{5.4.5}$$

для которой сам же и установил предлог применимости $\lambda/R \leq 0.5$.

Для случая больших отклонений λ/R должна использоваться формула вида

$$F = F_{cm} \left((B+A) \frac{\lambda}{R} \right)^{-1}. \tag{5.4.6}$$

Коэффициенты A и A+B определились Милликеном из опыта. Несмотря на тщательно проведенные опыты, без точного

теоретического обоснования полученная зависимость силы сопротивления от разреженности среды не вызывала должного доверия даже у самого Милликена и в опытах по проверке теории броуновского движения он избавляется от "самого неудобного и неточного множителя, связанного с броуновским движением", компенсируя сопротивление движущихся частиц электростатической силой. Теоретическая работа Эйнштейна, выполненная в 1924 году по просьбе Милликена, представляет собой приближенную оценку сопротивления сферы; точное значение получается лишь в свободномолекулярном пределе. Точный теоретический анализ возможен только с помощью решения уравнения Больцмана и появление такого рода работ в связи с развитием ЭВМ стало возможным почти пол- века спустя.

Первые вычисления в этой области ограничивались либо грубой аппроксимацией функции распределения, либо несколькими приближениями от свободномолекулярного предела. Особо следует отметить работу *Черчиньяни* с сотрудниками, в которой вариационным методом была вычислена кривая зависимость сопротивления сферы от разреженности среды во всем диапазоне течения от сплошной среды до свободномолекулярного предела. Характерным параметром разреженности считается число Кнудсена:

$$Kn = \frac{\lambda}{R}.$$
 (5.4.7)

При $Kn \to 0$ получается стоксовское значение сопротивления, а при $Kn \to \infty$ кривая выходит на свободномолекулярный режим со значением сопротивления, полученным Эйнштейном. Однако в этой работе решалось не само уравнение Больцмана, а его приближенная модель, в которой интеграл столкновений заменяется разностью равновесной и искомой функции распределения. Замена интеграла столкновения объясняется его исключительной сложностью, что существенно затрудняет проведение расчетов. Пока только метод Монте-Карло позволил преодолеть трудности вычисления интеграла столкновений и получить решение уравнения Больцмана для сопротивления сферы в режиме переходного течения (*Хлопков* [104]). Зависимость силы сопротивления от Kn из работы приведена на рис. 5.4

Изложенные результаты позволяют получить теоретическое значение коэффициента диффузии и среднего смещения во

всем диапазоне течения от сплошносредного до свободномолекулярного.

Необходимо отметить следующий факт. Милликен проводил опыты по уточнению закона Стокса на масляных каплях, для которых обнаружил интересную зависимость: 89,5% падающих на масло молекул отражаются диффузно, а 10,5% отражаются зеркально. Если построить график зависимости коэффициента диффузии и среднего смещения от числа Кп при таком же соотношении диффузно и зеркально отраженных молекул, то совпадение экспериментальных данных с точным численным решением уравнения Больцмана находится в пределах ошибок, допущенных при опыте и проведении расчетов рис. 5.6.

Здесь D_0 и λ_{x_0} – коэффициент диффузии и среднее смещение, соответствующие классическому решению Стокса. Как видно из графиков, диффузия и среднее смещение броуновских частиц сильно изменяются при изменении разреженности среды. Различие в величинах коэффициентов диффузии среднего смещения, вычисленных по формуле Стокса и с помощью решения уравнения Больцмана, может достигать нескольких порядков.

Следует оговориться, что зависимость λ_x от Kn работает только для тех значений t, для которых справедлива формула (5.4.2). При больших числах Kn, время свободного пробега может сравниться со значением t, что нарушает основное предположение, при котором была выведена эта формула.

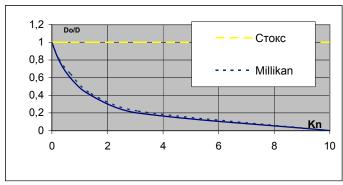


Рис. 5.5. Коэффициент диффузии броуновской частицы в разреженном газе

глава VI

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБТЕКАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТЕЛ В ПЕРЕХОДНОМ РЕЖИМЕ

Бурное развитие космической техники и высотной гиперзвуковой авиации требует надежных данных об аэродинамических характеристиках во всем режиме течения: от сплошносреднего до свободномолекулярного. При движении аппаратов в нижних слоях атмосферы обычно приходят к задачам, которые могут быть решены в рамках теории сплошной среды или, точнее, с применением уравнений Навье-Стокса и Эйлера. По существу, эти задачи обычной газовой динамики. В другом предельном случае, свободномолекулярном течении, интеграл столкновений в уравнении Больцмана обращается в нуль. В этом случае общее решение уравнения представляет собой граничную функцию распределения, сохраняющуюся вдоль траекторий частиц. Для простых тел аэродинамические характеристики находятся аналитически. Вычисление и сводка результатов потоковых характеристик дается в монографии Когана [8]. Решение задач обтекания тел сложной формы свободномолекулярным потоком и гиперзвуковым потоком, близким к свободномолекулярному, было произведено в работах Перепухова [52] методом Монте-Карло и в рамках теории первых столкновений.

Для решения задач в переходном режиме необходимо решать кинетическое уравнение. В данной главе рассматривается обтекание тел разреженным газом при различных числах Кп по методикам, разработанным в главах III и IV.

Постановка задачи аэродинамического обтекания тел проводится следующим образом. Поле течения в окрестности обтекаемого тела ограничивается областью размером нескольких длин свободного пробега молекул. Эта область разбивается на ячейки, линейный размер которых не должен превышать местную длину свободного пробега. На передней границе области задается невозмущенная функция распределения, а на боковой и задней границе ставится условие отсутствия градиента функции распределения. На поверхности обтекаемого тела задается закон взаимодействия молекул с поверхностью. В большинстве случаев на поверхности ставится условие полностью диффузного отражения. Характерными

безразмерными параметрами задачи являются $\operatorname{Re}_0 = \frac{\rho_{\infty} V_{\infty} L}{\mu(T_0)}$, где

 ${
m Re}_0$ — число Рейнольдса, рассчитанное по температуре торможения, аналог числа Маха, число $\vec{S}_{\infty} = \frac{\vec{V}_{\infty}}{\sqrt{2RT_{\infty}}}$ и температурный фактор

$$f_{_{\!W}}=rac{T_{_{\!W}}}{T_{_{\!0}}},\,\,\,$$
где $T_{_{\!W}}$ – температура поверхности (*Гусев, Коган, Перепу-хов* [108]).

Обычно параметром задачи обтекания также является угол атаки α (угол между направлением вектора \vec{S}_{∞} и продольной осью тела) и сорт газа, характеризуемый зависимостью вязкости газа от температуры $\mu \sim T^{\omega}$.

Выходными параметрами задачи являются аэродинамические характеристики обтекаемого тела; силы, моменты, потоки тепла, действующие на тело, а также газодинамические параметры в поле течения.

§ 1. Обтекание плоских тел

При помощи кинетического уравнения Крука методом Монте-Карло проводится расчет обтекания бесконечного клина и цилиндра в гиперзвуковом потоке разреженного газа. Вычисляются коэффициенты сопротивления и поля течения для клина с различными углами полураствора. Результаты расчета сравниваются с результатами других авторов и экспериментом.

Считается, что движение газа описывается приближенным кинетическим уравнением *Крука*:

$$\frac{df}{dt} = \nu(f_0 - f),\tag{6.1.1}$$

где f – функция распределения, V – частота столкновения.

Уравнение (6.1.1) предполагает, что функция распределения молекул после столкновения является наиболее вероятной при заданных числах сталкивающихся частиц, их импульсе и энергии. Это предположение при прямом моделировании процесса по методу Монте-Карло позволяет обходиться без запоминания функции

распределения. Блуждание пробной молекулы происходит по схеме:

- 1. С границы молекула влетает с функцией распределения, соответствующей граничным условиям на бесконечности.
- 2. Свободный пробег определяется в соответствии с частотой ν .
- 3. Скорость после столкновения находится по равновесной функции $f_{\scriptscriptstyle 0}$.
- 4. При взаимодействии с поверхностью тела выполняются условия непротекания с заданным законом отражения и т.д., начиная с пункта 2, пока молекула не покинет область течения. Во время блуждания в каждой ячейке подсчитывается новое поле макропараметров и после его установления (порядка 10^3-10^4

макропараметров и после его установления (порядка 10^3-10^4 траекторий) блуждание частиц происходит на новом поле. Счет ведется методом последовательных приближений, пока результаты данного приближения не будут отличатся от последующего с данной точностью.

Обтекание клина. Расчет обтекания производился при различных числах S_{∞} , Re_{∞} и α , где α – угол полураствора клина. Используя результаты расчета (*Власов, Хлопков,* [55, 56, 57, 64]) и эксперимента [108], можно заключить, что вверх по потоку возмущения передаются на расстоянии не больше 4–5 λ_{∞} . Поэтому передняя граница течения выбиралась на расстоянии 4–5 λ_{∞} . Граница над и за телом выбиралась на расстоянии в несколько раз большем. Шаг квадратной сетки по X и Y в поле течения брался посто-

В первом приближении в ячейках задается либо свободномолекулярное распределение параметров, либо постоянное по потоку распределение с параметрами, равными параметрам на ∞ . Для установления течения с точностью до 5% достаточно порядка 10^4 траекторий в каждой итерации,. а для установления решения достаточно нескольких итераций.

янным.

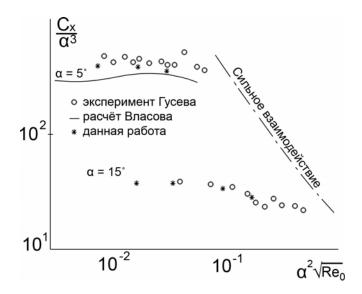


Рис. 6.1. Обтекание клина

Ввиду того, что к моменту проведения расчетов [64] не были известны опубликованные результаты, расчетные или экспериментальные по обтеканию клина для исследуемых режимов течений, сравнение полученных результатов было проведено с результатами обтекания пластины под углом атаки. На рис. 6.1 результаты данного расчета сравниваются с теоретическими и экспериментальными результатами обтекания пластины под углом атаки. Проведенное сравнение позволяет сделать вывод, что при больших скоростях и Re_0 порядка 1 аэродинамические характеристики для клина довольно близки к характеристикам для пластины.

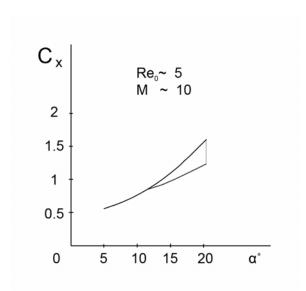


Рис. 6.2. Зависимость сопротивления клина от угла полураствора

На рис. 6.2 представлена зависимость поведения C_x от полуугла раствора клина, качественно повторяющая результаты для пластины. Пример расчета поля течения в окрестности клина представлен на рис. 6.3.

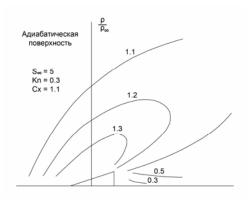


Рис. 6.3. Поле течения в окрестности клина 100

Таким образом, результаты проведенных расчетов показывают, что при больших сверхзвуковых скоростях качественно картина обтекания клина в переходном режиме соответствует физической картине обтекания платины под углом атаки, тщательно исследованной теоретически и экспериментально.

Обтекание цилиндра. Расчет обтекания проводился при различных параметрах задачи. В качестве примера на рис. 6.1 приводится поле плотности, отнесенное к плотности на бесконечности ($S_{\infty} = 1$).

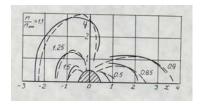


Рис. 6. 4. Обтекание цилиндра

Пунктиром показан эксперимент [107]. Расчет был произведен также для цилиндра с адиабатической поверхностью при S=5.

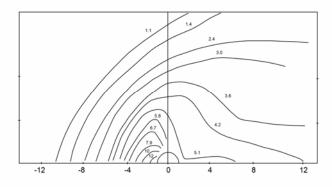


Рис. 6.5. Поле течения в окрестности цилиндра

На рис. 6.5 представлено поле течения над цилиндром при Kn=1. Небольшую разницу в полях течений по сравнению с результатами (*Vogenitz*, *Bird* [32]), по-видимому, можно объяснить отличием исходных уравнений. (В работе [32] методом Монте-Карло решается полное уравнение Больцмана).

§ 2. Обтекание осесимметричных тел

Широкий интерес к проблемам обтекания осесимметричных тел в переходном режиме объясняется, с одной стороны, все возрастающим фронтом исследований в области высотной гиперзвуковой аэродинамики, где осесимметричное обтекание можно рассматривать как первое приближение расчета обтекания реального аппарата. С другой стороны, изучением движения в газовом потоке мелких частиц с различными физическими процессами, происходящими на поверхности. При экспериментальном определении аэродинамических характеристик тел при больших скоростях обтекания в настоящее время натурные условия в существующих экспериментальных установках не воспроизводятся достаточно полно. В этой связи особое значение приобретает методика расчета аэродинамических характеристик, при помощи которой можно выявить степень влияния различных параметров обтекания. Известно, что переходный режим характеризуется тем, что влияние вязкости и теплопроводности проявляется не только в тонких пристеночных слоях и ударных волнах, как это происходит при обычном обтекании, но распространяется на всю зону течения. Поэтому для описания такого течения необходимо применять полную систему уравнений Навье-Стокса (N-S) сжимаемой жидкости во всей области течения. По мере дальнейшего увеличения разреженности среды необходимо рассматривать газ как совокупность большого числа молекул, поведение которых описывается кинетическим уравнением Больцмана (В).

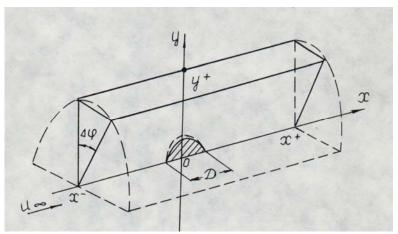


Рис. 6.6. Поле расчёта при осесимметричном обтекании

Постановка задач обтекания осесимметричных тел имеет некоторые особенности. Вообще говоря, поле течения для такого обтекания представляет собой трехмерную область, в которой строятся траектории частиц. Для того чтобы использовать симметрию по азимутальному углу, используются два приема. В первом из них [39] в поле течения вводится цилиндрическая система координат, и поле течения разбивается на ячейки по азимутальному углу (рис. 6.6). Поскольку во всех таких ячейках течение одинаковое, траектории пробных частиц строятся только в одной из этих ячеек. Таким образом, из цилиндра, который представляет собой поле течения, вырезается долька с углом раствора, равным одной ячейке по азимутальному углу. Траектории частиц начинаются и оканчиваются на границах течения - торцах и верхней части дольки, а на ее гранях задается закон зеркального отражения частиц. Подобный прием хотя и не избавлен от построения пространственной траектории, однако требуемая память ЭВМ не увеличивается.

Второй способ заключается в использовании представления кинетического уравнения в цилиндрических координатах. Тогда дифференциальный оператор примет вид

$$\frac{df}{dt} = \frac{\delta f}{\delta t} + \xi_r \frac{\delta f}{\delta r} + \xi_x \frac{\delta f}{\delta x} + \frac{\xi^2 \varphi}{r} \frac{\delta f}{\delta \xi_r} - \frac{\xi_r \xi_\varphi}{r} \frac{\delta f}{\delta \xi_\varphi}.$$

Он отличатся от оператора в декартовой системе координат наличием сил инерции, поэтому прямолинейные траектории частиц будут искривляться под действием сил, пропорциональным

$$\frac{{\xi_{\varphi}}^2}{r} \quad U \quad -\frac{{\xi_r}{\xi_{\varphi}}}{r}.$$

При решении задач обтекания осесимметричных тел (сфера, конус) с помощью релаксационного уравнения (6.1.1) в виде модели Крука обычно достаточно 5–7 итераций. В каждой итерации берется 30–50 тысяч траекторий, размер ячеек составляет 0.1–0.3 от длины свободного пробега молекул на бесконечности, погрешность вычисления интегральных характеристик колеблется около нескольких процентов, точность же расчета поля течения, особенно вблизи осевой линии, существенно ниже, и погрешность может достигать 10–15%.

Обтекание сферы. Наибольший интерес с практической точки зрения представляет поведение сопротивления сферы во всем диапазоне переходного режима обтекания. Расчет обтекания проводился для одноатомного газа для чисел М из диапазона, соответствующих сверхзвуковому и гиперзвуковому обтеканию. Число Re_0 изменялось от 0 до нескольких десятков. Значение температурного фактора t_w соответствовало крайним случаям холодного ($t_w \approx 10^{-2}$) и горячего ($t_w = 1$) тела, значения ω брались равными 1 и 1/2. Как известно, максвелловские молекулы и упругие сферы являются двумя крайними выражениями наиболее мягкого и наиболее жесткого потенциала взаимодействия. Естественно предположить, что значения аэродинамических характеристик для средних значений параметров будут находиться между упомянутыми крайними случаями, хотя вообще говоря, это неочевидно.

На рис. 6.7 приведена сводка теоретических и экспериментальных результатов из работы [68], иллюстрирующие влияние вышеупомянутых параметров течения на поведения коэффициента сопротивления сферы.

Результаты представлены в виде зависимости коэффициента сопротивления сферы C_x от параметра разреженности среды ${\rm Re}_0$. Линиями обозначены расчетные данные, а вертикальными черточками и точками различной конфигурации экспериментальные результа-

ты. Для удобства чтения условные обозначения сведены в таблицу. Зависимость поведения C_{x} от температурного фактора во всем диапазоне чисел Re представлена расчетами кинетического уравнения при $t_W = 1$ (кривая 1), $t_W = 0.1$ (кривая 2), расчетом уравнений Навье-Стокса при $t_W = 1$ (кривая 7) и значением, полученным по методу Ньютона (Nw). Экспериментальные данные различных авторов при tw = 1 (одинарные вертикальные черточки) и t= 0,01 (двойные вертикальные черточки) подтверждают зависимость C_x (Re_0 , t_W ~1) > C_x (Re_0 , t_W ~ 0,01) во всем диапазоне чисел Reo. Качественное влияние конденсации и испарения с поверхности сферы при ее обтекании газовым потоком иллюстрируется расчетными кривыми 3, 4, 5 и 6. Расчет, как отмечалось, для равномерно испаряющей (конденсирующей) сферы. Кривая 4 примерно соответствует условиям непротекания, кривая 3 – сильной конденсации на поверхности, а кривые 5 и 6 - сильному испарению.

Видно, что наиболее сильное влияние на аэродинамические характеристики обтекаемого тела в переходном режиме оказывает число Re₀. Причем максимальное изменение происходит в окрестности тех значений Re_0 , где необходимо кинетическое описание течения. Подобное поведение $C_{\rm r}$, по всей видимости, объясняется тем, что именно в этом диапазоне ($Re_0 \approx 1$) происходит резкое изменение структуры течения, связанное с началом формирования ударной волны. Этот процесс заканчивается в режиме вязкого ударного слоя, затем по мере уменьшения толщины волны, течение стабилизируется и сопротивление при М>>1 стремится к своему предельному значению, полученному по методу Ньютона. Как известно, гиперзвуковая стабилизация наступает при $M \ge 5$, поэтому влияние числа Маха на аэродинамические характеристики наиболее сильно будет сказываться при небольших сверхзвуковых скоростях. Так, с уменьшением числа M при M < 5 значение C_{\star} возрастает, причем довольно существенно. Рост $C_{\rm r}$ при малых значениях $Re_{\scriptscriptstyle 0}$ объясняется вкладом в сопротивление за счет теплового разброса молекул, который при больших М пренебрежимо мал. При этом важную роль в переходном режиме играет трение.

При приближении к невязкому пределу вклад трения уменьшается и сопротивление определяется в основном давлением.

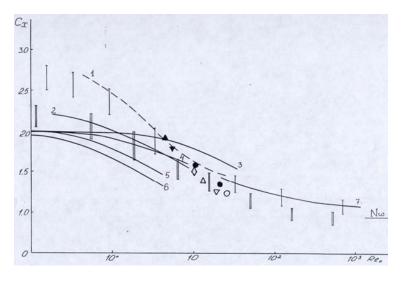


Рис. 6.7

Существенное влияние на поведение C_x оказывает и величина температурного фактора, причем, также как и в предыдущем случае, это влияние увеличивается по мере разреженности среды и достигает максимума в свободномолекулярном случае. При больших сверхзвуковых скоростях влияние температурного фактора, по сравнению с другими параметрами, являются определяющим и отличие в значениях C_x достигает 20–25%. Поведение

 C_x можно объяснить так: в свободномолекулярном случае превышение сопротивления горячего тела над холодным объясняется исключительно реактивной силой горячих частиц отраженных от тела. При уменьшении разреженной среды, когда столкновения начинают играть существенную роль, уплотнение течения перед холодным телом затрудняет передачу импульса молекул набегающего потока поверхности сферы. По мере дальнейшего увеличения плотности течения, влияние граничных условий ослабевает,

и величина C_x независимо от граничных условий стремится к своему предельному значению.

Наконец, по поводу влияния сорта газа на поведение аэродинамических характеристик можно сказать следующее. В большинстве случаев при одних и тех же условиях значения C_x для $\omega=1$ лежат несколько ниже значений C_x для $\omega=1/2$. Хотя в некоторых случаях отличие может достигать 10 %, этот факт еще требует дальнейшего исследования.

Представленные расчеты ни при каких значениях параметров не дают превышения коэффициента сопротивления над свободномолекулярным значением, возможность чего в своё время активно обсуждалась. Качественное сравнение с экспериментом в основном подтверждает выводы проведенного анализа.

Обтекание конуса. Для вычисления аэродинамических характеристик конуса в переходном режиме также использовался метод, разработанный в [36]. Расчет обтекания конуса на основе кинетических уравнений проводился в ряде работ. Здесь мы следуем исследованиям работ [67, 69] обтекания конуса, где проводится расчет при различных полууглах раствора конуса, различных числах Рейнольдса и значениях температурного фактора.

На рис 6.8 представлена зависимость коэффициента сопротивления конуса от различных параметров обтекания. Наиболее сильное влияние на изменение сопротивления, как и в предыдущем случае, оказывает число Рейнольдса. Расчет настоящей работы (сплошные линии на всех рисунках) перекрывает числа Re_0 от нуля до нескольких десятков. Общую картину поведения C_x можно составить, нанеся на графики значения сопротивления, полученные по теории первых столкновений вариационным принципом, теоретические данные режима вязкого взаимодействия и экспериментальные данные, обозначенные вертикальными черточками. Невязкий ($Re_0 \rightarrow \infty$) и свободномолекулярный ($Re_0 \rightarrow 0$) пределы обозначены прямыми линиями.

Сильное влияние на поведение C_x оказывает геометрия конуса. При больших полууглах раствора ($\theta \ge 20^0$) поведение C_x качественно аналогично сопротивлению затупленного тела, например, сферы. Так монотонно убывает по Re_0 от свободномолекулярного значения до невязкого предела. Так же, как и для затуп-

ленного тела, режим гиперзвуковой стабилизации наступает при $M \geq 5$.

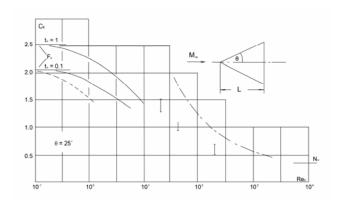


Рис. 6.8. Зависимость сопротивления сферы от различных параметров обтекания

Следующим фактором, влияющим на значение сопротивления при больших θ , является температурный фактор, причем так же, как и следующем случае, его влияние максимально в свободномолекулярной области. Необходимо отметить, при уменьшении полуугла раствора характер поведения сопротивления все больше отличается от поведения C_x затупленного тела. Так, например, он становится все менее чувствителен к температурному фактору, где точками нанесен расчет уравнения Больцмана), а при $\theta < 10^{\circ}$ его характер меняется качественно. Появляется заметный максимум функции C_x (Re_0) в окрестности $\mathrm{Re}_0 \approx 1$, причем рост C_x тем существенней, чем меньше полуугол раствора конуса и температурный фактор.

§ 3. Влияние испарения (конденсации) на эродинамическое сопротивление сферы при сверхзвуковом обтекании

В связи с развитием ракетно-космической техники в последнее время все большее значение приобретают задачи, связанные с движением в газовой среде при малых числах Рейнольдса сублимирующих и конденсирующих тел. Кроме того, подобные

задачи встречаются в метеорологии, в вакуумной и космических технологиях и т. д. Одной из важнейших характеристик при исследовании многофазных систем являются аэродинамические нагрузки, действующие на сублимирующие или конденсирующие тела (частицы) со стороны газового потока.

В работах (*Никольский*, *Хлопков*, [109–111]) с помощью теоретических расчетов и экспериментальных методов исследуется влияние испарения и конденсации с поверхности сферы на ее аэродинамическое сопротивление. Расчет проводится методом прямого статистического моделирования (*Хлопков* [39]). Решается модельная задача сверхзвукового обтекания сферы с разной степенью интенсивности испарения или конденсации с поверхности в зависимости от разреженности среды. Эксперименты проводились *Ю.В. Никольским* в вакуумной аэродинамической трубе с числом Маха воздушного потока M=7,05, при давлении торможения P_0 = 10 тор и различных температурах торможения T_0 = 294K; T_0 = 393K; T_0 = 493K; T_0 =572K. Измерение силы сопротивления сферы проводилось на аэродинамических весах, обеспечивающих погрешность измерения в пределах \pm 0,2%.

При расчете рассматривается стационарное обтекание осесимметричного тела сверхзвуковым потоком разреженного газа. Поле течения в окрестности обтекаемого тела ограничивается конечной областью, на передней границе которой задается равновесная функция распределения

$$f_{\infty} = \frac{\rho_{\infty}}{m} (2\pi R T_{\infty})^{-3/2} \exp(-(\xi - u_{\infty})^2 / 2R T_{\infty})).$$

На боковой и задней поверхности области ставится граничное условие отсутствия градиента функции распределения. На поверхности обтекаемого тела задается закон взаимодействия молекул с поверхностью. Так, в случае условия непротекания, отражение от поверхности считается диффузным с температурой, равной температуре поверхности стенки

$$f_w = \frac{\rho_w}{m} (2\pi R T_w)^{-3/2} \exp(-\xi^2 / 2R T_w),$$

здесь ρ_w , T_w – плотности и температура отраженных от поверхности молекул; $ho_{_{\!\scriptscriptstyle W}}$ определяется из условий непротекания. В случае, когда моделируются условия испарения или конденсации с поверхности, считается, что молекулы набегающего потока полностью захватываются телом, а с его поверхности происходит равномерное испарение с функцией распределения с заданными значе-

ниями ρ_{w} , T_{w} .

В эксперименте модели сфер изготавливались из кристаллической камфары. Заданное количество камфарного порошка прессовалось в сферической форме, так что плотность вещества моделей была постоянной, $\gamma = 0.99$. Выбор в качестве материала моделей камфары обусловлен значительной скоростью сублимации вещества в условиях вакуума. В процессе эксперимента модель фотографировалась. Форма ее в различные моменты времени представлена на рис. 6.10 при двух значениях температуры торможения $T_0 = 294$ К и $T_0 = 493$ К.

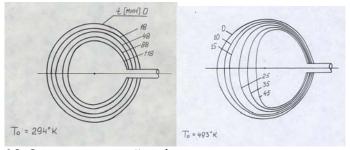


Рис. 6.9. Форма испаряющейся сферы в различные моменты времени

Величина единичного массового расхода камфары G с поверхности модели определялась экспериментально по изменению объема модели в единицу времени. Значения G, отнесенные к $ho_0 u_0$ газового потока и различных значениях температур торможения, представлены в таблице. Отметим здесь, что с увеличением температуры

газового потока, заметной становится неравномерность испарения вещества с поверхности модели (см. рис. 6.10).

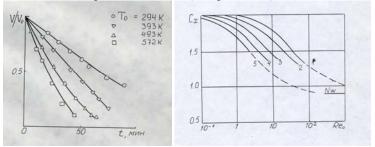


Рис. 6.10. Массовый расход камфары с поверхности модели и сопротивление сферы

Сила сопротивления испаряющейся модели измерялась в начальный момент времени (t~5 мин.), когда форма ее близка к сферической. За начальную температуру поверхности модели принималась комнатная температура, $T_W=294\mathrm{K}$.

На рис. 6.7 представлены расчетные и экспериментальные данные обтекания сферы при различных параметрах набегающего потока и условиях взаимодействия газового потока с поверхностью сферы. Результаты представлены в виде зависимости коэффициента сопротивления сферы С , от параметра разреженности среды Re₀ Линиями обозначены расчетные данные, а вертикальными черточками и точками различной конфигурации экспериментальные результаты. Для удобства чтения условные обозначения сведены в таблицу. Зависимость поведения С , от температурного фактора во всем диапазоне чисел Re_o представлена расчетами кинетического уравнения при $t_W = 1$ (кривая 1), $t_W = 0,1$ (кривая 2), расчетом уравнений Навье-Стокса при $t_w = 1$ (кривая 7) и значением, полученным по методу Ньютона. Экспериментальные данные различных авторов, собранные в предыдущем параграфе при $t_w = 1$ (одинарные вертикальные черточки) и t = 0,01 (двойные вертикальные черточки) подтверждают зависимость

$$C_{r}$$
 (Re_o, $t_{W} \sim 1$) > C_{r} (Re_o, $t_{W} \sim 0.01$)

во всем диапазоне чисел Re_o . Качественное влияние конденсации и испарения с поверхности сферы при ее обтекании газовым потоком

иллюстрируется расчетными кривыми 3,4,5 и 6. Расчет, как отмечалось, произведен для равномерно испаряющей (конденсирующей) сферы. Кривая 4 примерно соответствует условиям непротекания, кривая 3 – сильной конденсации на поверхности, а кривые 5 и 6 – сильному испарению. Результаты расчетов показывают сильную зависимость уменьшения С, от интенсивности испарения. Можно предположить, что уменьшение С $_{x}$ при наличии испарения будет наблюдаться и в эксперименте. На этом же рисунке нанесены экспериментальные данные по обтеканию сферы, полученные в данной работе (см. таблицу). Сплошными точками нанесены результаты измерения силы сопротивления обтекаемой металлической сферы с условиями непротекания на поверхности, совпадающие со сводными данными работы предыдущего параграфа. Кружечками нанесены результаты эксперимента по измерению сопротивления сферы из камфары с условиями слабого испарения с поверхности. Следует отметить, что приводимое здесь сравнение расчетных и экспериментальных данных по сопротивлению сублимирующей сферы носит качественный характер, Условия эксперимента соответствуют двухкомпонентной модели обтекания испаряющей сферы (набегающей поток - воздух, испаряющееся вещество - камфара), в то время как расчеты проведены для обтекания сферы, испаряющей тот же газ, что и набегающий. Тем не менее можно констатировать, что испарение с поверхности сферы, обтекаемой сверхзвуковым потоком, приводит к уменьшению ее аэродинамического сопротивления.

глава VII ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВКС

Большой объем аэродинамических расчетов и разнообразие схем летательных аппаратов, характерные для проектных исследований и первых шагов проектирования, обуславливают необходимость создания инженерных методов расчета аэродинамических характеристик аппаратов произвольной формы при всех возможных режимах полета. Существует ряд подходов к построению таких инженерных методик, основанных на имеющейся теоретической и экспериментальной информации о силовых нагрузках на этих режимах полета (Баранцев, Галкин, Ерофеев, Толстых, Бунимович, Чистолинов, Басс, Шведов, Еремеев, Хлопков, [84—96, 101]).

§ 1. Методика описания поверхности

Одним из основных вопросов методики расчета аэродинамических характеристик аппарата произвольной формы является рациональный выбор способа геометрического описания поверхности. Методы описания сложных поверхностей можно разделить на две основные группы: математическая аппроксимация поверхности и распределение в пространстве большого числа точек поверхности, по которым восстанавливается система элементарных площадок. К основным недостаткам первой группы методов обычно относят математические трудности аппроксимации сложных, существенно нелинейных поверхностей по малому числу контрольных точек, а к недостаткам второй - трудности подготовки исходных данных, связанных с необходимостью снятия с чертежа большого числа координат точек поверхности. В данной работе использована комбинация этих методов: вследствие сравнительной простоты и универсальности задания контрольных точек, и в конечном итоге восстановления элементарных площадок выбран второй метод, а для восстановления поверхности по контрольным точкам моделируемое тело разбивается на ряд характерных частей (крыло, носовая часть, донная часть фюзеляжа и т.д.), для каждой из которых проводится квадратичная интерполяция по контрольным точкам.



Рис. 7.1. Характерная геометрия ВКС

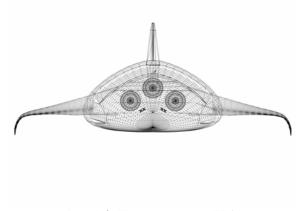


Рис. 7.2. Перспективный ГЛА

Вся поверхность аппарата разбивается на исходные части, например, для конфигурации, изображенной на рис.7.1 (Модель «Shattle-Буран») на три части: фюзеляж, киль и крыло (в силу симметрии рассматривается только правая половина чертежа).

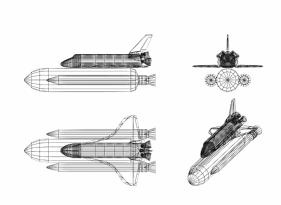


Рис. 7.3. Перспективный гиперзвуковой летательный аппарат

На рис. 7.2 (перспективный ГЛА) — на две части: фюзеляж (заостренный полуконус). На рис.7.3 (комплекс «Буран-Энергия») — на шесть частей: три затупленных цилиндра (ракета с ускорителями) и три части собственно «Буран». Для каждой части вводятся оси (x, y^i, z^i) , являющиеся осями цилиндрической системы координат. Оси разбиваются на конечное число характерных точек, задаваемых параметрами x_i, y_i, z_i . В этих точках в цилиндрической системе координат задаются сечения: ϕ_j ; R_{ij} ; ϕ_{yi} ; R_{yij} ; ϕ_{zi} ; R_{zij} . В зависимости от формы сечения оно может быть задано как в дискретной, так и в аналитической форме.

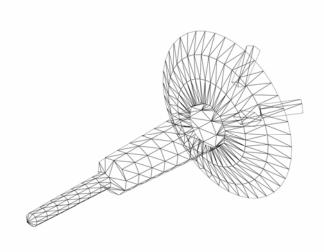


Рис. 7.4. Марсианский пенетратор

Для уточнения поверхности в промежуточных точках предусматривается интерполяционная процедура. Промежуточные точки на осях и значения углов интерполируются по формулам линейной интерполяции

$$x_i = \frac{1}{2} (x_{\frac{i-1}{2}} + x_{\frac{i+1}{2}}), \qquad \varphi_j = \frac{1}{2} (\varphi_{\frac{j-1}{2}} + \varphi_{\frac{j+1}{2}}).$$

Значения радиусов с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа интерполируются дважды – по (р. и по *x*:

$$R(a) = \sum_{i=1}^{3} R(a_i) \prod_{j \neq 1} \frac{a - a_j}{a_i - a_j}$$
,

где a — соответствуют значениям ϕ и x соответственно в интерполяционных точках.

Таким образом, с необходимой точностью задаются исходные точки на поверхности. Остается вопрос, каким образом натянута на имеющийся остов поверхность обтекаемого аппарата. Как уже отмечалось, для поставленной цели подходит линейная аппроксимация, поэтому в качестве основного будем рассматри-

вать линейный элемент, представляющий собой треугольник, построенный по ближайшим трем точкам. Вершины треугольников в декартовых координатах для различных частей определяются по формулам:

для фюзеляжа

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ R_{ij} \cos \varphi_j \\ R_{ij} \sin \varphi_j \end{pmatrix},$$

для крыла

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + z_i \cos \alpha_z - R_{zij} \cos \gamma_{zi} \\ y_0 + z_i \sin \alpha_z + R_{zij} \sin \varphi_{zj} \\ z_0 + z_i \cos \alpha_z \cos \beta_z - R_{zij} \cos \varphi_{zj} \sin \gamma_{zi} \end{pmatrix},$$

где (x_0, y_0, z_0) – начальные координаты оси крыла z', α_z – угол наклона оси крыла к плоскости y=0, β_{zi} – угол наклона оси крыла к оси z, γ_{zi} – угол наклона задаваемых сечений на оси z'

Для полного задания элемента необходимо определить его ориентацию и площадь поверхности. Пусть $a=r_2-r_1,\ b=r_3-r_1$ — образующие элементы вектора. Тогда площадь элемента

$$S = \frac{1}{2}(a \times b),$$

и нормаль к поверхности

$$n = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) / (|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|).$$

Оценка погрешности аппроксимации линейными элементами при обработке на свободномолекулярном режиме обтекания дает неплохие результаты. Так, для аппроксимации конуса при вычислении сопротивления с точностью 5% (средняя погрешность статистических методов) необходимо примерно 10 элементов, а для аппроксимации сферы — 100. Однократное применение интерполяционной процедуры уменьшает погрешность на порядок.

§ 2. Методика расчета аэродинамических характеристик летательных аппаратов в условиях свободномолекулярного обтекания

Задача определения аэродинамических характеристик ставится обычным образом. Из бесконечности на обтекаемое тело набегает свободномолекулярный поток частиц с равновесной функцией распределения

$$f\infty = n \infty \left(\frac{m}{2\pi kT\infty}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left[-\frac{m}{2kT\infty}(\xi - V)^{2}\right].$$

В общем случае на поверхности необходимо задавать связь функции распределения падающих f^{∞} и отраженных f_r молекул. Теоретически такая связь устанавливается посредством интегрального уравнения на каждом элементе поверхности

$$f_r = \int_{(\xi n) \le 0} K(\xi, \xi_r) f_\infty d\xi ,$$

где ядро $K(\xi, \xi_r)$ зависит от физических и химических свойств поверхности и газа.

Существующих теоретических и экспериментальных данных недостаточно для того, чтобы достоверно судить о свойствах этого ядра. Наиболее надежные результаты эксперимент дает лишь при установлении связи между потоковыми характеристиками набегающих и отраженных частиц посредством коэффициентов аккомодации σ_n , σ_{τ} , σ_e . Если не рассматривать поле течения, то значения коэффициентов аккомодации полностью определяют постановку задачи. Значения нормального p_n , касательного p_{τ} импульса, а также потока тепла q на элемент поверхности в случае гиперзвукового обтекания имеют вид:

$$p_n = \frac{\rho V^2}{2} \left[(2 - \sigma_n) 2 \sin^2 \theta + \sigma_n \sqrt{\frac{\chi - 1}{\chi} t_w \pi} \sin \theta \right],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{\tau} &= \frac{\rho V^2}{2} \, \sigma_{\tau} \, 2 \mathrm{sin} \, \theta \, \mathrm{cos} \, \theta \,, \\ \mathbf{q} &= \frac{\rho V^2}{2} \, \sigma_{e} \, (1 - 2 \frac{\chi - 1}{\chi} \, \mathbf{t}_{w}) \mathrm{sin} \, \theta \,. \end{aligned}$$

Для проверки работоспособности изложенной выше методики были проведены систематические расчеты целого ряда тел: полусфера, конус с различными полууглами раствора, затупленные полуконуса и затупленные полуконуса с крыльями. Расчеты проводились при всех углах атаки от 0 до 180 градусов, различных параметрах набегающего потока и граничных условий. Для перечисленных выше тел при некоторых значениях параметров имеются как теоретические, так и экспериментальные результаты.

Таким образом, по изложенной методике и составленной программе расчета можно с достаточной точностью вычислять аэродинамические характеристики широкого класса тел, в том числе и аппаратов сложной формы, для которых интерференция различных частей не является существенной.

§ 3. Инженерная методика расчета аэродинамических характеристик тел сложной формы в переходном режиме

Для построения инженерных методов расчета аэродинамических характеристик тел сложной формы в переходном режиме полета от свободномолекулярного течения до сплошной среды в последние годы широко используются приближенные методы, основанные на гипотезе локальности [84]. В данной работе использован подход, суть которого сводится к предположению независимости аэродинамических нагрузок на элемент поверхности тела от ориентации других элементов. В основу программы расчета аэродинамических характеристик сложных тел в переходном режиме положен метод, описанный в § 2 для свободномолекулярных течений.

В соответствии с гипотезой локальности считается, что поток импульса на поверхность тела определяется местным углом падения. В данной работе используются выражения для элементарных сил давления и трения в форме [85].

$$p = p_0 \sin^2 \theta + p_1 \sin \theta,$$

$$\tau = \tau_0 \sin \theta \cos \theta.$$

Здесь коэффициенты p_0 , p_1 , τ_0 , (коэффициенты режима течения) зависят от числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_0 = \rho_\infty \mathrm{u}_\infty \mathrm{L}/\mu_0$, температурного фактора $t_w = T_w/T_0$, коэффициетов аккомодации и отношения удельных теплоемкостей χ (L — характерный размер, $\mu = \mu(T_0)$ — коэффициент вязкости, T_0 , T_w — температура торможения и температура поверхности).

Зависимость коэффициентов режима в гиперзвуковом случае должна обеспечивать переход к свободномолекулярным значениям при $Re_0 \rightarrow 0$ и значением теории Ньютона, методов тонких касательных клиньев или конусов при $Re_0 \rightarrow \infty$. На основе анализа расчетных и экспериментальных данных предложены эмпирические формулы

$$p_0 = p_{\infty} + [p_{\infty}(2 - \alpha_n) - p_{\infty}]p_1 / z,$$

$$p_1 = z \exp[-(0.125 + 0.078t_w) \operatorname{Re}_{0\theta\phi\phi}],$$

$$\tau_0 = 3.7\sqrt{2}[R + 6.88 \exp(0.0072R - 0.000016R^2)]^{-1/2},$$

здесь

$$z = \left(\frac{\pi(\chi - 1)}{\chi} t_w\right)^{1/2},$$

$$Re_{0\theta\phi\phi} = 10^{-m} Re_0, \quad m = 1.8(1 - h)^3,$$

$$R = Re_0 \left(\frac{3}{4} t_w + \frac{1}{4}\right)^{-0.67},$$

h — параметр тонкости аппарата, равный отношению его высоты к длине. Задание поверхности осуществляется так же, как и в § 1.

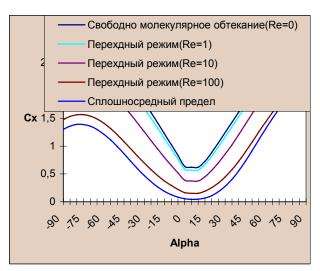


Рис. 7.5. Сопротивление ВКС типа Shattle на различных этапах траектории

Предложенная методика хорошо зарекомендовала себя для расчета гиперзвукового обтекания выпуклых не очень тонких и не плоских заостренных тел. Расчет полностью отражает качественное поведение C_x в зависимости от разреженности среды во всем диапазоне углов атаки и дает количественное соответствие с точностью около 5%.

глава VIII

НЕВЯЗКОЕ ОБТЕКАНИЕ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ С ТЕПЛОПОДВОДОМ

§1. Основы метода

В предыдущих главах были освещены возможности расчета течений разреженного газа в широком диапазоне разреженности на основе уравнения Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi} \nabla f = I(f)$$
 (8.1.1)

по схеме «релаксация-перенос», расщепляющей процесс решения на шаге Δt на два независимых этапа:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\xi} \nabla f = 0 , \qquad (8.1.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = I(f) ,$$

что соответствует бесстолкновительному переносу и пространственно-однородной релаксации соответственно (здесь I(f) – интеграл столкновений). Используя моментные аппроксимации функции распределения:

$$f = F(\vec{\xi}, M^0, M^1, M^2, ..., M^K),$$
 (8.1.3)

этапы переноса и релаксации можно проводить также и на уровне моментов:

$$\frac{\partial M^k}{\partial t} = \alpha M^k, \qquad (8.1.4)$$

здесь $\alpha=0$ для моментов $M^k=n,\vec{u},T$ (сохранение массы, импульса и энергии на этапе релаксации) и $\alpha=-1/\tau_r$ для тензора напряжений, $\alpha=-2/3\tau_r$ для вектора потока тепла, τ_r — время релаксации. Этап переноса можно осуществлять как на уровне функции распределения с использованием моделирующих частиц или без него, так и на уровне моментов различными способами (получаются системы квазигидродинамических уравнений). Метод позволяет моделировать течения сплошной среды, где вид функции

распределения известен – это эйлеровская, навье-стоксовская либо барнеттовская функция распределения.

В работе *Пуллина* [81] проводится моделирование течений невязкого сжимаемого идеального газа с помощью локальной равновесной функции распределения f_0 :

$$f_0 = \left(\frac{m}{2 \pi k T}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\vec{\xi} - \vec{u})^2}{2 k T}\right)$$

как на уровне частиц, так и на уровне макровеличин. Рассматривается одномерная задача о формировании скачка перед поршнем, движущемся со сверхзвуковой относительно покоящегося газа скоростью. Ниже приводятся описание алгоритма, проводимого на уровне частиц, и обсуждение проблемы выбора шагов по времени и пространству. В данной работе рассчитываются течения невязкого сжимаемого двухатомного идеального газа, описываемые локальной равновесной функцией f_0 . Используется схема «релаксация перенос», описанная выше. Вычисления проводятся на уровне частиц. В этом случае алгоритм выглядит следующим образом. Ансамбль частиц со скоростями ξ и внутренними энергиями ε_i движется в течение интервалов времени Δt , после каждого из которых подсчитываются макропараметры в ячейках пространства $\Omega = \{(k,l), k = 1,..., K, l = 1,..., L\}$, с размером $\Delta x \times \Delta y$. При этом в течение перелетов учитываются граничные условия (зеркальное отражение частиц от поверхности, обеспечивающее условие скольжения, условие локальной равномерности или невозмущенности потока на свободной границе). Выбор шага по времени Δt осуществляется исходя из условия малости изменения функции распределения в данной точке пространства:

$$\frac{\partial f}{\partial t} \Delta t << f . \tag{8.1.5}$$

Более конкретно, в общем трехмерном случае

$$\Delta t = s \min(\Delta x, \Delta y, \Delta z) / \max(U + a_s),$$

где s < 1, a_s — скорость звука. Шаг по пространству выбирается исходя из градиентов макропараметров. Таким образом, выбор шагов соответствует сплошной среде. Подсчет макропараметров в ячейке (k,l):

$$\vec{U}_{kl} = \frac{1}{N_{kl}} \sum_{i=1}^{N_{kl}} \vec{\xi}_i , \qquad (8.1.6)$$

$$T_{kl} = \frac{2}{(3+v)k_B} \frac{1}{N_{kl}} \sum_{i=1}^{N_{kl}} \left\{ \frac{m}{2} \left(\xi_{ix} - U_{klx} \right)^2 + \frac{m}{2} \left(\xi_{iy} - U_{kly} \right)^2 + \frac{m}{2} \xi_{jz}^2 + v \frac{k_B T_i^{"}}{2} \right\}$$

§ 2. Описание алгоритма

Перелет в двухмерном случае осуществляется по формулам:

$$x_{i2} = x_{i1} + \xi_{ix}^{"} \cdot \Delta t$$
$$y_{i2} = y_{i1} + \xi_{iy}^{"} \cdot \Delta t.$$

Здесь поступательная степень свободы, по которой отсутствует макроскопическое движение, может быть включена во внутреннюю

энергию прибавлением слагаемого $\frac{k_B T_i''}{2}$ [81], вращательные сте-

пени свободы – прибавлением слагаемого $v \cdot \frac{k_B \, T_i^{\prime\prime}}{2}$ [112], $T_i^{\prime\prime}$ –

температура в исходной для частицы ячейке, $\,N_{k\,l}\,$ – число частиц в

ячейке (k,l) на данном шаге t, ν – число внутренних степеней свободы в молекуле. После подсчета макропараметров для каждой частицы разыгрывается скорость, соответствующая функции распределения f_0 с новыми значениями макропараметров.

Одной из особенностей алгоритма является то, что координаты частиц не запоминаются, а перед каждым этапом переноса распределяются равномерно по объему ячейки, что экономит вычислительные ресурсы (оперативную память). В дальнейшем будет показано, что это не влияет на порядок аппроксимации метода.

На этапе получения ансамбля скоростей на основе функции распределения f_0 необходимо получить ансамбль $N_{k\,l}$ час-

тиц в ячейке (k,l) со скоростями ξ_i , $i=1,\ldots,N_{k\,l}$, соответствующими f_0 с новыми макропараметрами. Этот этап выполняется согласно теории математической статистики путем решения задачи о получении конечного набора случайных величин ξ_i по функции распределения f_0 . Наиболее распространенное решение данной задачи состоит в следующем. Рассмотрим случайные величины η и θ , имеющие плотности вероятности:

$$p_{\eta}(x) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-\beta x^{2}),$$

$$p_{\theta}(y) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \exp(-\beta y^{2})$$

соответственно. Если рассмотреть совместное распределение этих величин

$$p_{\mathcal{Q}}(x, y) = p_{\eta}(x)p_{\theta}(y) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right) \exp\left(-\beta(x^2 + y^2)\right)$$

и переписать его в полярных координатах

$$x = r \cdot \text{Cos}\varphi$$

$$v = r \cdot \sin \varphi$$

то легко получить следующее выражение:

$$p_Q(r,\theta) = r\left(\frac{\beta}{\pi}\right) \exp\left(-\beta r^2\right).$$

Нетрудно заметить, что функция $p_{\mathcal{Q}}(r, \varphi)$ является произведением двух нормированных функций

$$p_{\mathcal{Q}}(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi} \cdot 2r\beta e^{-\beta r^2} = p_{\varphi} \cdot p_r,$$

где

$$p_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} ,$$

$$p_{r} = 2r\beta e^{-\beta r^{2}} .$$

Таким образом, в соответствии с теорией математической статистики можно записать соотношения между искомыми случайными

величинами r_Q и φ_Q и независимыми случайными величинами α_1 и α_2 , равномерно распределенными на интервале (0,1):

$$\int_{0}^{r_{Q}} 2r \beta \exp(-\beta r^{2}) dr = 1 - \alpha_{1},$$

$$\int_{0}^{\varphi_{Q}} \frac{1}{2\pi} d\varphi = \alpha_{2}.$$

(В данном случае в правой части первого уравнения для удобства последующих выкладок записана случайная величина $(1-\alpha_1)$, а не α_1). Окончательно

$$r_{Q} = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \sqrt{-\ln \alpha_{1}} ,$$

$$\varphi_{Q} = 2 \pi \alpha_{2} .$$

Возвращаясь к исходным декартовым координатам, получаем выражения для η и θ :

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \sqrt{-\ln \alpha_1} \cdot \cos(2\pi\alpha_2),$$

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \cdot \sqrt{-\ln \alpha_1} \cdot \sin(2\pi\alpha_2).$$

Используя аналогичный алгоритм, нетрудно получить формулы для трех компонент скоростей, распределенных в соответствии с функцией f_0 :

$$\begin{split} \xi_{i1}' &= \sqrt{\frac{2kT}{m}} \cdot \sqrt{-\ln\alpha_{i1}} \cdot \operatorname{Cos}(2\pi\alpha_{i2}), \\ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \xi_{i3}' \cdot ' &= U, \\ \xi_{i3}' &= \sqrt{\frac{2kT}{m}} \cdot \sqrt{-\ln\alpha_{i3}} \cdot \operatorname{Cos}(2\pi\alpha_{i4}), \\ \vec{\xi_{i}} &= \vec{\xi_{i}}' + \vec{U}, \quad i = 1, \dots, N. \end{split}$$

Здесь α_{ik} – независимые случайные числа, равномерно распределенные на интервале (0,1).

Одной из особенностей данного метода является то, что изза ограниченности числа молекул (при вычислениях использовалось от 50 до 6000 молекул в ячейке в невозмущенном потоке) не выполняется условие консервативности. Таким образом, на данном этапе необходимо преобразовывать разыгранные скорости. Подсчитаем следующие величины:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{\xi}'_{i} = \delta \vec{U} ,$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\vec{\xi}'_{i})^{2} = 3R T' .$$

Скорости молекул вычисляются по новой формуле:

$$\vec{\xi}'' = \left(T/T'\right)^{1/2} \left(\vec{\xi}' - \delta \vec{U}\right) + \vec{U} .$$

В этом случае условие консервативности обеспечено:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \vec{\xi}_{i}'' = \vec{U}, \qquad \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (\vec{\xi}_{i}')^{2} = 3R T'.$$

В численной реализации можно сократить время розыгрыша скоростей посредством использования симметризованного алгоритма. Этот алгоритм предполагает вычисление только половины всех скоростей, а именно: вычисление $\vec{\xi}_{2i-1}'$ — скоростей, соответствующих частицам с нечетными номерами. Скорости частиц с четными номерами берутся симметричными вычисленным: $\vec{\xi}_{2i}' = -\vec{\xi}_{2i-1}'$.

В случае, когда ячейка содержит нечетное число частиц, можно воспользоваться двумя способами: или выбрать число частиц N_j в ячейке четным, используя соответствующий вес, или

положить для оставшейся частицы скорость $\vec{\xi}_N' = 0$. В любом случае выполняется соотношение

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{\xi_i'}=0$$

Таким образом, при вычислении $ec{\xi}_i''$ берется $\delta ec{U} \equiv 0$.

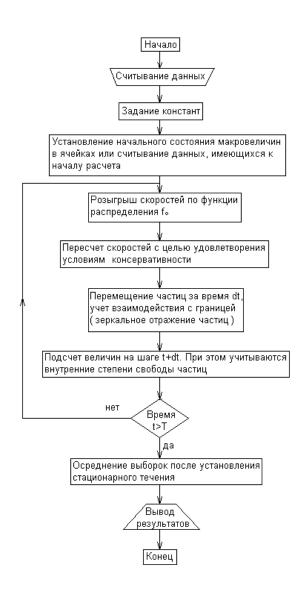


Рис. 8.1. Блок-схема программы

§ 3. Аппроксимационные свойства

Оценка аппроксимационных свойств метода ПСМ для невязких течений проводилась на основе выражений для потоков вида:

$$F_{\varphi}^{\vec{n}} = \rho \int_{(\vec{\xi}, \vec{n}) > 0} f_0 \widetilde{\varphi}(\vec{\xi}, \vec{n}) d\vec{\xi} , \qquad (8..3.1)$$

где $F_{arphi}^{ec{n}}$ есть поток величины \widetilde{arphi} в направлении нормали $ec{n}$, f_0 –

локально-равновесная функция ,
$$\widetilde{\varphi} = \left\{1, \vec{\xi}, \frac{\xi^2}{2}\right\}$$
 .

В одномерном случае уравнение баланса для φ ($\varphi = m\widetilde{\varphi}$) в равномерной системе ячеек будет следующим:

$$\frac{1}{\Delta V} \sum_{j} \varphi_{j}(t + \Delta t) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{j} \varphi_{j}(t) + \left[-F_{\varphi}^{l\,n+} + F_{\varphi}^{l+1\,n-} - F_{\varphi}^{l\,n-} + F_{\varphi}^{l-1\,n+} \right] \Delta t / \Delta x \quad , \tag{8.3.2}$$

где n+ есть нормальный вектор в положительном направлении, n- — нормальный вектор в отрицательном направлении, l- номер ячейки в сетке $\Omega = \left\{ \omega_l \, , l=1, \ldots, L \right\}$ размера Δx ,

$$\omega_l = \left(x_l - \Delta x / 2, x_l + \Delta x / 2\right), \ \Delta V -$$
объем ячейки. Выражения (8.3.1)—(8.3.2) использовались у *Пуллина* [81] для расчета задачи о поршне через макропараметры и в данной книге по методу Монте-Карло. По сути, эти выражения представляют собой разностный метод. Аппроксимация этапа переноса при использовании выражений (8.3.1)—(8.3.2) составляет $O(\Delta t, \Delta x)$. В одномерном случае этот результат может быть просто получен из (8.3.2). Выполнение аналогичных вычислений в двухмерном случае более громоздко, также из-за необходимости специального рассмотрения углов ячеек. В целом, схемы типа (8.3.2) могут использование затруднено при сложных сетках в расчетной области, и тогда расчет на уровне частиц может быть вполне оправдан.

Рассмотрение аппроксимационных свойств может быть проведено непосредственно на основе алгоритма. При использовании равномерной прямоугольной сетки (рис. 8.2) задача выглядит

следующим образом (для простоты и наглядности взят двумерный случай). Для частиц основной группы $(u_x \pm a_s) \times (u_y \pm a_s)$ при указанном ограничении на шаг Δt обмен между ячейками для частиц группы $\vec{\xi}$ будет осуществляться в слоях $|\xi_x|\Delta t < \Delta x$, $|\xi_y|\Delta t < \Delta y$.

В методе ПСМ для разреженного газа выбор шага по времени отличается: $\Delta t \approx \min(\Delta x)/U_{\rm max}$, где $\Delta x \approx \lambda/3$, λ - локальная длина свободного пробега, и такое рассмотрение неприменимо.

Уравнение баланса в 2-х мерном случае можно записать ($N_{ij\xi}^t$ — число частиц $\vec{\xi}$ в ячейке (i,j): $\left(x_i\pm\frac{1}{2}\Delta x\right)\times\left(y_j\pm\frac{1}{2}\Delta y\right)$ в момент времени t) с учетом равномерного распределения частиц по объему ячейки, поэтому

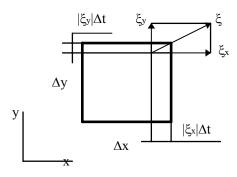


Рис. 8.2

дроби представляют относительные (к $N_{ij\xi}^t$) числа частиц, вылетевших из ячейки и влетевших в ячейку из соседних ячеек. Данное рассмотрение не зависит от числа Маха и вида функции распреде-

ления (кроме убывания при больших по модулю скоростях). Уравнение (8.3.3) отражает баланс частиц.

$$\begin{split} N_{ij\xi}^{t+\Delta t} &= N_{ij\xi}^{t} - \\ &- N_{ij\xi}^{t} \frac{|\xi_{x}| \Delta t \Delta y + |\xi_{y}| \Delta t \Delta x - |\xi_{x}| |\xi_{y}| (\Delta t)^{2}}{\Delta x \Delta y} + \\ &+ N_{i-\omega x}^{t} j \xi \frac{|\xi_{x}| \Delta t \Delta y - |\xi_{x}| |\xi_{y}| (\Delta t)^{2}}{\Delta x \Delta y} + \\ &+ N_{ij-\omega y}^{t} \xi \frac{|\xi_{y}| \Delta t \Delta x - |\xi_{y}| |\xi_{x}| (\Delta t)^{2}}{\Delta x \Delta y} + \\ &+ N_{i-\omega x}^{t} j - \omega y \xi \frac{|\xi_{x}| \Delta t \Delta x - |\xi_{y}| |\xi_{x}| (\Delta t)^{2}}{\Delta x \Delta y} + \\ &+ N_{i-\omega x}^{t} j - \omega y \xi \frac{|\xi_{x}| |\xi_{y}| (\Delta t)^{2}}{\Delta x \Delta y}. \end{split}$$
 ГДе
$$\omega x = \operatorname{sign}(\xi_{x}), \omega y = \operatorname{sign}(\xi_{y}).$$

Полагая существование достаточно гладкой функции \widetilde{f} : $\widetilde{f}(t,x_i,y_j,\vec{\xi})=N^t{}_{ij\xi}/\Delta x\Delta y\Delta\vec{\xi}$, после разложения в ряды относительно ячейки (i,j): (8.3.3) запишется в виде

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial t} + \vec{\xi} \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \vec{x}} = \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x) . \tag{8.3.4}$$

Существует также статистическая ошибка $\sim 1/\sqrt{N_{ij}}$, где N_{ij} – число частиц в ячейке. Статистическая природа метода требует значительных временных затрат для получения решения с высокой точностью, однако основные черты решения получаются для двумерных и особенно трехмерных задач за время, сравнимое с распространенными газодинамическими методами. Выбор шагов по пространству и числа модельных частиц должен быть согласован, также и с выбором параметра s. При обеспечении консервативности в методе ПСМ стационарное решение, полученное на небольшом ансамбле частиц, при осреднении по времени уточняется во всех деталях, как если бы оно было получено на ансамбле усреднения. Весьма существенным является вопрос улучшения аппроксимации,

в связи с чем стоят вопросы о построении сеток и коррекции потоков для достижения этой цели.

§ 4. Алгоритмы и сетки

В расчетах двумерных течений использовались прямоугольные сетки. Сетки имели размер 90 × 60 для двухмерных, и 90 × 35 для осесимметричных задач. На верхней границе ставилось условие невозмущенности потока. На передней границе также ставилось условие невозмущенности. На задней границе ставилось условие локальной равномерности потока. В двухмерных задачах считалось, что течения имеют единичную ширину, так что объем ячейки численно равен ее площади в плоскости (x, y). метричных задачах объем ячейки должен вычисляться как объем сектора соответствующего кольца. В этом случае объем ячеек, расположенных на большем расстоянии от оси, больше чем объем ячейки той же площади в плане, расположенной ближе к оси. Это означает, что если плотность газа одинакова во всех ячейках, то число молекул вдали от оси достаточно велико при заданном значении числа частиц вблизи оси, необходимом для получения удовлетворительной статистики. Таким образом, увеличивается время, необходимое для расчета. Эта проблема решается путем введения весового множителя. Весовой множитель позволяет получить результат в грубом приближении при значительном уменьшении числа частиц в области, а соответственно и времени расчета. В силу того, что релаксационная задача в данном методе не решается, отрицательное влияние весового множителя, по-видимому, не столь существенно [10]. В приведенных здесь осесимметричных задачах при получении грубого приближения число молекул в ячейке первого слоя в невозмущенном потоке полагалось равным 1000, а число молекул в области ограничивалось 2000.

Кроме того, как в двухмерных, так и в осесимметричных течениях при получении окончательных результатов использовался метод осреднения. Он заключается в том, что результаты нескольких последних шагов осредняются. Это позволило получить приемлемую точность даже в областях с малыми градиентами, которые плохо разрешаются данным методом. На рис. 8.1 представлена блок-схема программы, использовавшейся для получения результатов.

При подсчете макропараметров использовались безразмер-

ные переменные
$$\widetilde{T}=rac{T}{T_{_{\infty}}}$$
 и $\widetilde{U}=rac{U}{\sqrt{R\;T_{_{\infty}}}}$, где $R=rac{k_{_{B}}}{m}$, так что

уравнения для получения температуры и расчета скоростей молекул приобретают вид:

$$\widetilde{T}_{kl} = \frac{1}{(3+\nu) \cdot N_{kl}} \sum_{i=1}^{N_{kl}} \left\{ \left(\widetilde{\xi}_{ix} - \widetilde{U}_{klx} \right)^2 + \left(\widetilde{\xi}_{iy} - \widetilde{U}_{kly} \right)^2 + \xi_{jz}^2 + \nu \cdot \widetilde{T}_i'' \right\}, \quad (8.4.1)$$

$$\widetilde{\xi}_{lj}' = \sqrt{2\widetilde{T}} \cdot \sqrt{-\ln \alpha_{jl}} \cdot \cos(2\pi \alpha_{j2}). \quad (8.4.2)$$

В этом случае скорость невозмущенного набегающего потока $\widetilde{U}_{_{\infty}}=M_{_{\infty}}\cdot\sqrt{\frac{5+\nu}{3+\nu}}\,,$ где $M_{_{\infty}}$ – число Маха.

Поскольку в данном методе не рассматриваются физические столкновения между молекулами, то не имеет смысла и размерная величина ячейки в отношении к длине пробега, так как отсутствует понятие физической длины свободного пробега молекулы. Ограничения, накладываемые на отношение размеров ячеек к интервалу времени Δt , обсуждались ранее.

Осесимметричный случай. В данной работе расчет осесимметричных течений сводится к расчету двухмерных течений. В целом схема алгоритма сохраняется, однако существует ряд отличий в реализации этапа переноса. Рассматривается декартова система координат, одна из осей которой совпадает с осью симметрии течения (в нашем случае это ось x). Перед этапом переноса все частицы в области равномерно распределяются по объему ячеек в плоскости (x,y). Далее по известным формулам разыгрываются скорости и происходят перелеты частиц в трехмерном пространстве, после чего вычисляются их новые координаты:

$$\begin{aligned} x_{j2} &= x_{j1} + \xi_{jx}'' \cdot \Delta t \,, \\ y_{j2} &= y_{j1} + \xi_{jy}'' \cdot \Delta t \,, \\ z_{j2} &= z_{j1} + \xi_{jx}'' \cdot \Delta t \,. \end{aligned} \tag{8.4.3}$$

При подсчете макропараметров в ячейках учитываются только две координаты частиц — $\left(x_{j2},y_{jN}\right)$, где $y_{jN}=\sqrt{y_{j2}^2+z_{j2}^2}$. В данном случае y_{jN} выполняет роль радиуса — расстояния от конечного положения частицы до оси симметрии течения. При этом перед вычислением макроскопической скорости в ячейках компоненты скоростей частиц $\xi_{jy}^{\prime\prime}$ и $\xi_{jz}^{\prime\prime}$ должны быть преобразованы в новые компоненты ξ_{jy}^* и ξ_{jz}^* так, чтобы ξ_{jy}^* осталась радиальной компонентой. Новые значения ξ_{jy}^* и ξ_{jz}^* определяются следующим образом:

$$\xi_{jy}^{*} = \left(\xi_{jy}^{"} \left(y_{j1} + \xi_{jy}^{"} \cdot \Delta t\right) + \xi_{jz}^{"^{2}} \cdot \Delta t\right) / y_{jN},$$
 (8.4.4)

$$\xi_{jz}^{*} = \left(\xi_{jz}^{"} \left(y_{j1} + \xi_{jy}^{"} \cdot \Delta t\right) - \xi_{jy}^{"} \cdot \xi_{jz}^{"} \cdot \Delta t\right) / y_{jN} . \tag{8.4.5}$$

Разобьем область на L ячеек по оси x так, что $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_L = \Delta x$. Следовательно, ячейка с номером i ограничивается координатами $x_{i-1} = (i-1) \cdot \Delta x$ и $x_i = i \cdot \Delta x$. По координате y область разбивается на M ячеек так, что каждая ячейка ограничивается в любой плоскости x двумя радиусами: нижним $r_{j-1}(x) = (j-1) \cdot \Delta r$ и верхним $r_j(x) = r_{j-1}(x) + \Delta r$. По третьей координате φ область ограничена двумя плоскостями, проходящими через ось Δx , угол между которыми составляет Δx . Для площади сечения произвольной ячейки Δx 0 плоскостью Δx 1 имеет место следующее соотношение:

$$S(x^*) = \frac{\Delta \varphi}{2} \cdot \left(2 \cdot r_{j-1}(x^*) + \Delta r\right) \cdot \Delta r,$$
где $x^* \in \left[x_{i-1}, x_i\right].$ (8.4.6)

Объем данной ячейки:

$$V_{ij} = \int_{x_{i,j}}^{x_i} S(x^*) dx = \frac{\Delta \varphi \cdot \Delta r}{2} ((2j-1) \cdot \Delta r) \cdot \Delta x$$
 (8.4.7)

После определения x_k необходимо найти вторую координату частицы y_k . Для этого надо решить задачу о равномерном распределении частиц по сечению ячейки плоскостью $x=x_k$. Эта задача решается аналогично предыдущей: отношение площадей

$$S_k^{**} \left(\Delta r_k^{**} \right) = \frac{\Delta \varphi}{2} \left(2 \, r_{j-1} \left(x_k \right) + \Delta r_k^{**} \right) \cdot \Delta r_k^{**} \tag{8.4.8}$$

И

$$S_{k} = \frac{\Delta \varphi}{2} \left(2 r_{j-1} (x_{k}) + \Delta r \right) \cdot \Delta r$$
(8.4.9)

дает функцию распределения случайной величины η , определяющей положение частицы по координате y:

$$F_{\eta}(\Delta r_{k}^{**}) = \frac{S_{k}^{**}(\Delta r_{k}^{**})}{S_{k}} =$$

$$= \frac{2 r_{j-1}(x_{k}) \cdot \Delta r_{k}^{**} + \Delta r_{k}^{**2}}{2 r_{j-1}(x_{k}) \cdot \Delta r + \Delta r^{2}}$$
(8.4.10)

(здесь аналогично предыдущему случаю используется обозначение $\Delta \, r_k^{**} = r_k^{**} - r_{j-1} \big(x_k \big), \; \text{где} \quad r_k^{**} - \; \text{переменная, принадлежащая}$ отрезку $\left[r_{j-1} \big(x_k \big), r_j \big(x_k \big) \right]). \qquad \text{Окончательно} \qquad \text{находим}$ $y_k = \Delta r \sqrt{j^2 - (2j-1) \lambda_y} \; , \; \text{где} \; \lambda_y \; - \; \text{случайная величина, равномерно распределенная на интервале (0,1). Частицы распределяются равномерно по координате <math>x$.

§ 5. Приложение метода прямого статистического моделирования невязких течений к обтеканию затупленных тел при наличии подвода энергии в потоке

Как отмечено в имеющихся по данному вопросу работах [126, 127], при соответствующем расположении областей теплоподвода вблизи внешней поверхности обтекаемого тела можно снижать волновое сопротивление, получать управляющие аэродинамические усилия. Одними из реальных способов объемного подвода тепла к потоку являются поглощение энергии лазерного излучения, а также использование электроразрядных устройств [127]. В данной работе рассматриваются задачи о сверхзвуковом обтекании двумерных затупленных тел (плоский торец, цилиндрический торец) потоком идеального совершенного газа при наличии объемно распределенного источника тепла, расположенного перед ним.

Задачи решались с помощью метода прямого статистического моделирования невязких течений, обладающего абсолютной устойчивостью, практической монотонностью и компактностью расчетного шаблона, соответствующего алгоритму. Порядок аппроксимации метода, как и у других методов прямого моделирования, первый по пространству и времени. Счет велся сквозным образом до установления по времени. Поверхности ударных волн не выделялись. Дополнительные условия на границе объемного источника не ставились. На внешних границах ставились условия невозмущенного потока, на оси или плоскости симметрии и на задней границе условия обращения в нуль производных по нормали от газодинамических функций. На поверхности тел ставилось условие непротекания. Граничные условия реализовывались на этапе переноса в алгоритме прямого моделирования. На теле и на плоскости симметрии модельные частицы отражаются зеркально, на границах специальным образом реализовывались необходимые условия. Учет внутренних степеней свободы осуществлялся за счет переноса каждой модельной частицей средней для ячейки внутренней энергии (в предположении равновесия), распределенной равномерно по частицам данной ячейки.

Первоначально рассчитывались задачи симметричного обтекания плоского и осесимметричного торцов сверхзвуковым потоком при $M_{\infty}=3$, $\gamma=1.4$. Данные задачи неоднократно рассчитывались различными методами. Согласие данных в среднем находилось в пределах 3–5%. Для контроля подсчитывалось также давление в точке торможения за прямым скачком, которое может быть получено теоретически [129].

Полученные поля течений использовались как начальное приближение для расчета течений с теплоподводом. Основное внимание с практической точки зрения было уделено цилиндрическому торцу. Источник тепла занимал несколько ячеек с постоянной плотностью тепловыделения. Источник располагался в плоскости симметрии или на оси симметрии на некотором расстоянии

перед телом. Интенсивность источника определялась безразмерным параметром Q_0 :

$$I = Q_0 \frac{n_{\infty}(3+\nu)k_B T_{\infty}}{2 \Delta t}$$

и была постоянной по времени. Источник занимал 3–9 ячеек, при фиксированной длине. Исследовалось также влияние поперечного размера источника при фиксированной мощности.

На рис. 8.3–8.5 приведены некоторые результаты расчета обтекания плоского торца. Качественно все основные особенности такие же, как в случае цилиндрического торца. Далее более подробно обсуждаются результаты расчетов по цилиндрическому торцу.

Как известно [126], за тепловым пятном образуется протяженная область сильно разогретого газа с пониженной плотностью и давлением. На периферии возникает висячий скачок уплотнения.

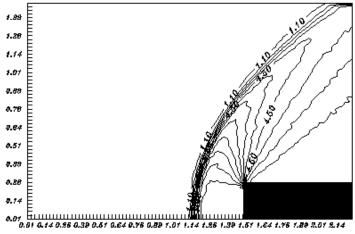


Рис. 8.3. Изолинии поля давлений (M_{∞} = 3, γ = 1.4)

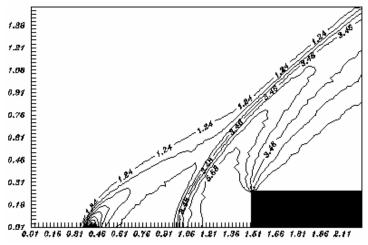


Рис. 8.4. Изолинии поля давлений для течения с источником $(\mathbf{M}_{\infty}\!=\!3,\gamma=1.4,\,Q_0\!=\!4)$

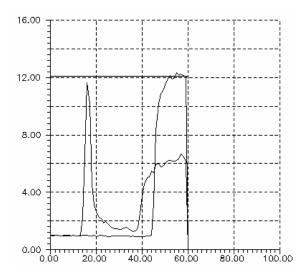


Рис. 8.5. Распределение давления в плоскости симметрии с нагревателем и без него (M_{∞} = 3, γ = 1.4, Q_0 = 4)

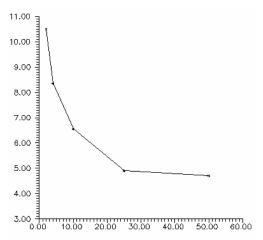


Рис. 8.6. Зависимость давления торможения от интенсивности источника

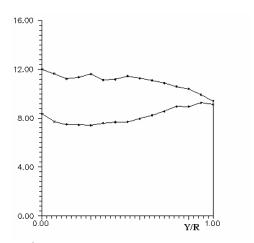


Рис. 8.7. Распределение давления по торцу в случаях с нагревателем (Q_0 = 4) и без него

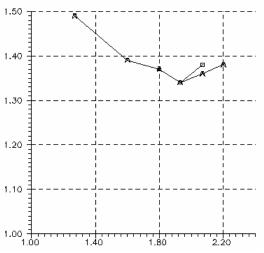


Рис. 8.8. Зависимость C_x от расстояния источника до торца

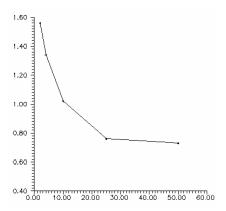


Рис. 8.9. Зависимость C_x от мощности источника

140

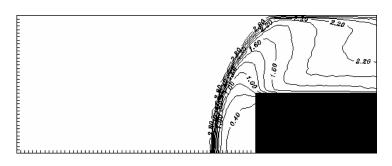


Рис. 8.10. Изолинии числа Маха ($M_{\infty} = 3$, $\gamma = 1.4$)

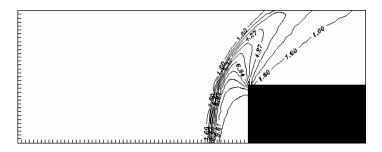


Рис. 8.11. Изолинии поля давления (M_{∞} = 3, γ = 1.4)

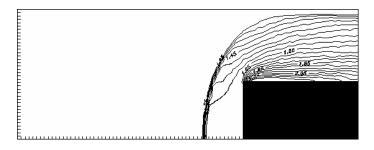


Рис. 8.12. Изолинии поля энтропии ($M_{\infty} = 3$, $\gamma = 1.4$)

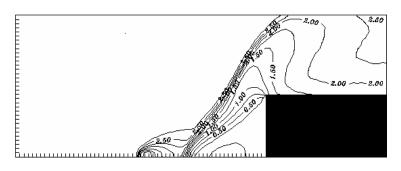


Рис. 8.13. Изолинии числа Маха (М $_{\infty}$ =3, γ =1.4, Q_{0} =4)

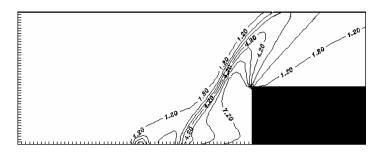


Рис. 8.14. Изолинии поля давления (${\rm M}_{\infty}{=}\,3,\,\gamma{\,=}\,1.4,\,Q_0{\,=}\,4$)

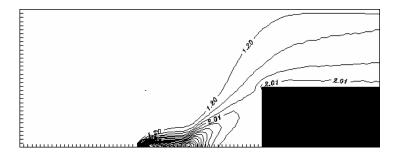


Рис. 8.15. Изолинии поля энтропии (${\rm M}_{\infty}$ = 3, γ = 1.4, ${\it Q}_{\rm 0}$ = 4)

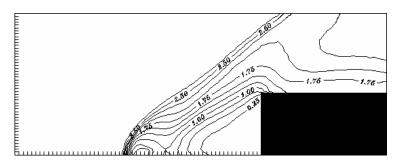


Рис. 8.16. Изолинии числа Маха (M_{∞} = 3, γ = 1.4, Q_0 = 50)

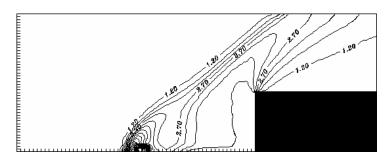


Рис. 8.17. Изолинии поля давления (${\rm M}_{\infty}{=}$ 3, ${\gamma}$ = 1.4, ${\it Q}_0{=}$ 50)

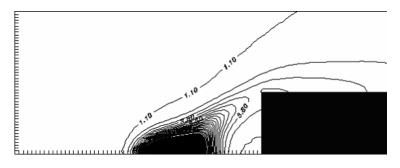


Рис. 8.18. Изолинии поля энтропии (M_{∞} = 3, γ = 1.4, Q_0 = 50)

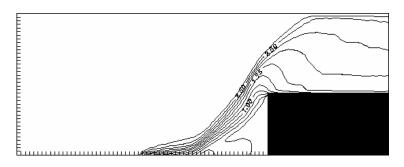


Рис. 8.19. Изолинии числа Маха («тепловая игла», M_{∞} = 3.07, γ = 1.08, Q_0 = 15)

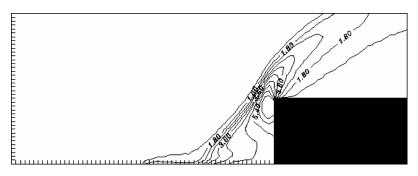


Рис. 8.20. Изолинии поля давления («тепловая игла», M_{∞} = 3.07, γ = 1.08, Q_0 = 15)

При достаточно большом теплоподводе внутри теплового пятна возникает локальная дозвуковая зона. Потери полного давления для частиц, прошедших через пятно, значительны и растут с увеличением энерговклада (рис. 8.6). При этом имеет место эффект «насыщения» потока теплом: начиная с некоторого порогового значения энерговклада полное давление перестает уменьшаться, достигнув своего минимального значения, равного примерно 40% от начального при числе Маха M_∞ = 3. Увеличение потерь полного давления приводит к снижению волнового сопротивления тел, расположенных вниз по потоку [127]. Наличие подвода тепла сильно влияет на структуру потока. Задача является нелинейной, возмуще-

ния сильными и почти единственным путем решения задачи является численный расчет в рамках газовой динамики. Поток, прошедший через источник, является неоднородным: частицы, прошедшие через пятно, нагрелись существенно больше, чем частицы на периферии потока. Давление торможения в критической точке оказывается меньше, чем давление на периферии торца (рис. 8.7) и возникает зона отрыва с возвратным течением. В [127] обсуждаются ситуации, когда в рамках невязкого расчета возникает возвратное течение. В данном случае его возникновение имеет ясную причину. Было отмечено, что сопротивление цилиндрического торца, находящегося в сформировавшемся следе, имеет слабый минимум, так что при l/R > 2 сопротивление практически постоянно. На рис. 8.8 представлена зависимость коэффициента сопротивления от расстояния между источником и торцом при Q_0 =4. Кроме того, наблюдается эффект стабилизации по подводу тепла – при Q_0 =25 снижение сопротивления составляет 55%, а при Q_0 =50 – 57%, т.е. увеличение теплоподвода в 2 раза приводит к дополнительному уменьшению сопротивления на 2% (рис. 8. 9). На рис. 8.10-8.18 представлены картины изолиний газодинамических величин на некоторых характерных режимах.

Была рассмотрена еще одна задача о течении с теплоподводом — задача об обтекании цилиндрического торца с установленной перед ним «тепловой иглой». Данная проблема в нелинейной постановке рассматривается в [130]. В настоящей работе задача решалась аналогично предыдущим, т.е. с подводом энергии в «тепловой игле». Задача решалась при параметрах $M_{\infty} = 3.07$, $\gamma = 1.08$, $Q_{\Sigma} = 15$. Полученное без теплоподвода поле течения использовалось как начальное приближение для расчета течения с теплоподводом. Как видно из рис. 8.19-8.21, общий эффект перестройки течения наблюдался в расчете: образовывалась коническая ударная волна и зона циркуляционного возвратного течения. Сопротивление тела снизилось с 1.85 до 1.3. В силу различной постановки задач установившееся значение C_x отличается от результата [130]. В начале процесс носит колебательный характер, затем наблюдалось установление, что качественно согласуется с [130].

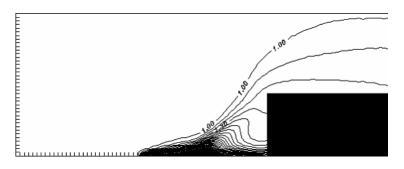


Рис. 8.21. Изолинии поля энтропии («тепловая игла», M_{∞} = 3.07, γ = 1.08, Q_0 = 15)

Полученные данные находятся в хорошем качественном согласии с данными работы [126], в которой рассматривалось обтекание сферы при $M=3,\,\gamma=1.4,\,$ как по наблюдавшимся эффектам, так и по порядкам величин.

Несмотря на статистическую природу метода и первый порядок аппроксимации, основные эффекты и порядки величин выявлены в согласии с имеющимися данными. Более точный расчет может быть проведен с использованием монотонных схем повышенной точности. Для методов прямого статистического моделирования расчет задач такого характера по-видимому, не совсем типичен. Полученные данные свидетельствуют также о консервативности алгоритма. Так как точность в методах ПСМ определяется в основном мелкостью расчетной сетки, то при возрастании мощности вычислительной техники можно надеяться на более точное решение подобных задач газовой динамики. Также уже при имеющейся точности можно решать задачи с учетом физико-химичесикх процессов (химические реакции, испарение).

Общие черты приведенного метода состоят в том, что структура течения выделяется верно, включая дозвуковые области; происходит численное сглаживание разрывов; для получения основного приближения требуется небольшое время, так как расчет можно выполнить на малом числе частиц при s~0.5–0.9. Чтобы получить результат более высокой точности в стационарном случае, необходимо на грубом приближении пропорционально увеличить число частиц и получить установление на новой точности. Таким образом, может быть получена статистическая точность 3–5% за

небольшое время. Приемлемая точность ($\sim 1\%$) также достаточно быстро получается на современных машинах. Расчет нестационарной задачи может быть выполнен на быстродействующих ЭВМ. Метод может быть эффективно применен к задачам сложной конфигурации и сложной физической природы (перенос излучения, энергоподвод, испарение, конденсация, горение, МГД течения и др.) [6,10], где применение распространенных газодинамических методов затруднено или пока не налажено, для выяснения структуры течения с приемлемой точностью, основных эффектов и количественных характеристик.

Заключение

Таким образом, в работе изложен обзор методов Монте-Карло, разработанных в вычислительной аэродинамике разреженного газа, и их применение в смежных, нетрадиционных для использования статистического моделирования, областях. Приводится история развития методов, их основные свойства, достоинства и недостатки. Устанавливается связь прямого статистического моделирования аэродинамических процессов с решением кинетических уравнений и показывается, что современный этап развития вычислительных методов немыслим без комплексного подхода к разработке алгоритмов с учётом всех особенностей решаемой задачи: физической природы процесса, математической модели, теории вычислительной математики и стохастических процессов. Рассмотрены пути развития методов статистического моделирования.

Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, Грант №04-07-90345, а так же Государственной Программой Поддержки Ведущих Научных Школ, Грант №96-15-96063

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. *Hall A*. On an experiment determination of π // Messeng. Math. N_2 2, 1873.
- 2. *Metropolis N., Ulam S.* The Monte-Carlo method // J. Amer. Stat. Assos. 44, № 247, 1949
- 3. *Владимиров В.С., Соболь И.М.* Расчёт наименьшего характеристического числа уравнения Пайерлса методом Монте-Карло // Вычислит. математика. № 3, 1958
- 4. *Haviland J.K. Lavin M.D.* Application of the Monte-Karlo Method to Heat Hauster in Rarefied of Gases // Phys. Fluids. V. 5, N 11. 1962.
- 5. *Bird G.A.* Shock-Wave Structure in rigid Sphere Gas // Rarefied Gas Dynamics. Vol.1. N.-Y. Acad. Press, 1965.
- 6. *Ермаков С.М.* Метод Монте-Карло и смежные вопросы. М.: Наука, 1985
- 7. *Кац М.* Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965 8. *Коган М.Н.* Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
- 9. Белоцерковский О.Н., Яницкий В.Е. Численные методы в динамике разреженного газа II // Труды IV Всесоюзной конференции
- мике разреженного газа. II. // Труды IУ Всесоюзной конференции по динамике разреженного газа. АН СССР, ЦАГИ. М., 1975.
- 10. Вычислительные методы в динамике разреженных газов / Пер. с англ.–М.: Мир, 1969.
- 11. *Берд Г.* Молекулярная газовая динамика / Пер. с англ. М.: Мир, 1981.
- 12. *Белоцерковский О.М.* Численное моделирование в механике сплошных сред. М: Наука, 1984.
- 13. *Рыжов О.С.* Численные методы в динамике разреженных газов, развитие и использование в Вычислительном центре АН СССР // Численные методы в динамике разреженных газов. ВЦ АН СССР. 1977. Вып.3.
- 14. Э*ндер М.А.*, Э*ндер А.Я*. Об одном представлении уравнения Больцмана // ДАН СССР. 1970. Т.193, № 1. С.61–64.
- 15. *Черемисин Ф.Г.* Численное решение кинетического уравнения Больцмана для одномерных стационарных движений газа. ЖВМ и МФ, 1970, Т.УІ, № 3. С.654–665.
- 16. *Черемисин Ф.Г.* Развитие метода прямого численного решения уравнения Больцмана // Численные мет. в динамике разреженных газов / ВЦ АН СССР, 1973, вып.1. С. 74–101.

- 17. Щербак С.Л. О решении задачи обтекания полубесконечной пластины на основе уравнения Больцмана // Труды внеш. авиац. училища гражд. авиации. Л., 1970. Вып.45. С.96–109.
- 18. Bhathnagor P.D., Gross E.P., Krook M.A. A model for collision processes in gases // Phys. Rev., 94. 1954.
- 19. *Holway L.H.* Approximation Procedures for Kinetic Theory. Ph. D. Thesis, Harvard, 1963
- 20. *Шахов Е.М.* Метод исследования движений разреженного газа. М.: Наука, 1974
- 21. *Шахов Е.М.* Поперечное обтекание пластины разреженным газом // Изв. АН. МЖГ. 1972, № 6. С.107–113.
- 22. *Ларина И.Н.* Обтекание сферы разреженным газом // ПММ. 1969. Т.33, вып.5.
- 23. *Ларина И.Н., Рыков В.А.* Аэродинамика сферы, газирующей в потоке разреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1983, № 3. С.173–176.
- 24. Лимар E.Ф. Численное исследование течения разреженного газа около цилиндра // Числ. методы в дин. разр. газов / ВЦ АН СССР. М., 1975, вып.2. С.95–107.
- 25. *Huang À.Â. Hartley D.K.* Kinetic Theory of the Sharp Leady Edge Problem in Supersonic Flow// Phys. Fluids. 1969. Vol.12, N 1. P.96–108.
- 26. *Huang A.B. Huangs P.F.* Supersonic Leading Edge Problem According to the Ellipsoidal Model // Phys. Fluids. 1970. Vol 13, N 2. P.309–317.
- 27. *Haviland J.K. Lavin M.D.* Application of the Monte-Karlo Method to Heat Hauster in Rarefied of Gases // Phys. Fluids. 1962. V., N 11. P. 1399–1408.
- 28. *Haviland J.K.* Determination of the Shock-Wave Thickinesses by the Monte-Karlo Method // Rarefied Gas Dynamics. Vol.1, n.y, Acad. press, 1969.
- 29. *Haviland J.K.* The Solution of two Molecular Flow Problems by the Monte-Karlo Method // Method in Computational Physics Advanced in Research and Applications. Vol.4, Application in Hydrodynamics. N 4, Acad. Press. 1965.
- 30. *Bird G.A.* The Velocity distribution Function within a Shock wave // J. Fluid Mech. 1967. Vol.30, part 3.
- 31. *Bird G.A.* Shock-Wave Structure in Rigid Sphere Gas // Rarefied Gas Dynamics. Vol. 1, N.-Y., Acad. Press, 1965.

- 32. *Vogeniz F.M..*, *Bird G.A.*, *Broadwell J.E.* Theoretical and experimental flows about several simple shapes // AIAA J. 1968, Vol 6, № 12.
- 33. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. М. Наука, 1973.
- 34. *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Курс статистического моделирования. М.: Наука, 1976.
- 35. *Марчук Г.И., Михайлов Г.А. и др.* Метод Монте-Карло в атмосферной оптике Навье // М.: Наука, 1976.
- 36. *Хлопков Ю.И*. Решение линеаризованного уравнения Больцмана // ЖВМ и МФ АН СССР, N5, 1973
- 37. Ермаков С.Н. Об аналоге схемы Неймана-Улама в нелинейном случае // ЖВМ и МФ. N 3, 1973.
- 38. *Ермаков С.М., Нефедов* _._. Об оценках суммы Неймана по методу Монте-Карло // ДАН СССР. 1972. Т. 202, N 1, c.27–29.
- 39. *Хлопков Ю.И.* Статистический метод решения приближенного кинетического уравнения // Учен. зап. ЦАГИ. 1973. Т. 4, N 4. C.108–113.
- 40. Григорьев Ю.Н., Иванов М.С., Харитонова М.И. К вопросу о решении нелинейных уравнений динамики разреженного газа методом Монте-Карло // Численные методы механики сплошной среды / СО АН СССР, ВЦ, Новосиб., 1971. Т. 2.
- 41. *Власов В.И.* Улучшение метода статистических испытаний (Монте-Карло) для расчета течений разреженных газов // ДАН СССР, 1966. Т.167, N 5.
- 42. Власов В.И. Расчет методом Монте-Карло потока тепла между параллельными пластинами в разреженном газе // Уч. зам. ЦАГИ, 1970, 1, N 4. C.46–51.
- 43. *Ерофеев А.И.*, *Перепухов В.А.* Расчет обтекания пластины, расположенной вдоль потока разреженного газа // Учен. зап. ЦАГИ, 1975. Т. VI, N3. C.51-57.
- 44. Яницкий В.Е. Применение стохастического процесса Пуассона для расчета столкновительной релаксации перевновленного газа // ЖВМ и МФ, 1973. Т.13, N2. С.505–510.
- 45. Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е. Статистический метод "частиц в ячейках" для решения задач динамики разреженного газа. 1, Π . // ЖВМ и МФ, 1975. Т.15, N5. С. 6.

- 46. Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е. Численные методы в динамике разреженных газов // Труды IV Всесоюзной конференции по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. М.: Издательский отдел ЦАГИ, 1977. С.101–183.
- 47. *Белоцерковский О.М., Яницкий В.Е.* Прямое численное моделирование течений разреженного газа // Числен. мет. в дин. разреж. газов. АН СССР, ВЦ. М., 1977, вып.3. С.81–88.
- 48. Яницкий В.Е. Применение некоторых статистических моделей для численного решения уравнения Больцмана. Канд. Диссертация. М., ВЦ АН СССР, 1974.
- 49. Яницкий В.Е. Применение процессов случайных обсуждений // ЖВМ И МФ. 1974. N1.
- 50. *Сычев В.В.* Асимптотическая теория отрывных течений // Изв. АН СССР, МЖГ. 1982. N 2.
- 51. Перепухов В.А. Аэродинамические характеристики сферы и затупленного конуса в потоке сильноразреженного газа // ЖВМ и МФ, 1967. Т.7, N 2.
- 52. *Перепухов В.А.* Применение метода Монте-Карло в динамике сильно разреженного газа // Динамика разреж. газа и молекулярн. газовая динамика. Труды ЦАГИ, 1972. Вып.1411,
- 53. *Ерофеев А.И.*, *Перепухов В.А.* Расчет поперечного обтекания пластины потоком разреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1976, N4. C.106-112.
- 54. *Горелов С.Л., Ерофеев А.И.* Влияние внутренних степеней свободы на обтекание пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. N 6. C.151–156.
- 55. Власов В.И. Расчет аэродинамических характеристик плоской пластины бесконечного размаха в гиперзвуковом потоке разреженного газа // Учен. Зап. ЦАГИ, 1971. Т.2, N 6. С.116–118.
- 56. Власов В.И. Расчет обтекания пластины под углом атаки потоком разреженного газа // Учен. зап. ЦАГИ, 1973. Т.4, № 1. С.17—24.
- 57. Власов В.И. Расчет методом Монте-Карло обтекания пластины под углом атаки потоком разреженного газа // Труды IV Всесоюзной конференции по динамике разреженных газов и молекулярной газовой динамике. М.: Изд. отдел ЦАГИ, 1977. С.353–357.
- 58. *Ерофеев А.И*. О моделировании межмолекулярного взаимодействия при решении уравнений Больцмана методом Монте-Карло // Изв. АН СССР. МЖГ. 1977, N 6. C. 171–174.

- 59. *Ерофеев А.И., Перепухов В.А.* Обтекание пластины потоком разреженного газа // Труды IV Всесоюзной конф. по динамике разр. газа и молекулярной газ. динамике. М., Изд. отдел ЦАГИ, 1977. С. 358–364.
- 60. Власов В.И., Ерофеев Л.И., Перепухов В.А. Расчет обтекания пластины потоком разреженного газа // Труды ЦАГИ. Вып. 1830. 1974. С. 40.
- 61. *Григорьев Ю.Н., Иванов М.С.* Обтекание цилиндра потоком разреженного газа в переходном режиме // Численные методы механики сплошной струи. СО АН СССР, ВЦ. Изв. 1974. Т.5, N 1. С.152–156.
- 62. Иванов М.С. Решение осесимметричных задач динамики разреженного газа методом Монте-Карло // Труды IV Всесоюзной конференции по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике М., отдел ЦАГИ, 1977. С. 388–391.
- 63. Григорьев Ю.Н., Иванов М.С. К решению задач аэродинамики разреженного газа методом Монте-Карло // Прикладная аэродинамика космических аппаратов. Киев: Наукова Думка.
- 65. Хлопков Ю.И. Сопротивление сферы в потоке разреженного газа малой скорости // Ученые записки ЦАГИ. Т.6, N 5. 1975.
- 66. *Хлопков Ю.И.*, *Шахов Е.М.* Кинетические модели и их роль в исследованиях течений разреженного газа// ВЦ АН СССР. М., 1974. Вып. 3.
- 67. *Хлопков Ю.И*. Обтекание осесимметричных тел гиперзвуковым потоком разреженного газа // Учен. зап. ЦАГИ. 1978. Т.9.
- 68. *Хлопков Ю.И.* Характеристики обтекания сферы при сверх- и гиперзвуковых скоростях // Изв. АН СССР, МЖГ. N 3, 1981.
- 69. *Хлопков Ю.И.* Характеристики обтекания конуса в переходном режиме под нулевым углом атаки // Изв. АН СССР, МЖГ. N 3, 1981.
- 70. *Khlopkov Ju.I.* Monte-Karlo procedure for the solution of rarefied gas dynamics problems // XIII Inter. Symp. on RGD, VI, N-Y, Lond. 1988.
- 71. *Серов В.В., Хлопков Ю.И.* Совершенствование метода нестационарного прямого моделирования течения в динамике разреженного газа // Тезисы докладов IX Всесоюзной конференции по ДРГ. Свердловск, 1987.

- 72. Ерофеев А.И., Омелик А.И., Хлопков Ю.И. Численное и экспериментальное моделирование аэродинамических характеристик на больших высотах. Конкурс на лучшую работу ЦАГИ, 1978.
- 73. *Ерофеев А.И.* Пространственное обтекание пластины гиперзвуковым потоком разреженного газа // Уч. зап. ЦАГИ, 1978. Т.2, N5.
- 74. *Кравчук А.С., Серов В.В., Хлопков Ю.И.* Возможности методов прямого статистического моделирования. Юбилейный сборник LXX-летия ЦАГИ. М., 1990.
- 75. Горелов С.Л., Ерофеев А.И., Хлопков Ю.И. Численное моделирование аэродинамических процессов на больших высотах. Гагаринские чтения. М.Н. 1987.
- 76. *Горелов С.Л., Ерофеев А.И.* Обтекание конуса двухатомным разреженным газом // Уч. зап. ЦАГИ. Т.15, N 1. 1984.
- 77. *Хлопков Ю.И.* Статистический метод решения задач газовой динамики // Труды VI Всесоюзной конференции по ДРГ. Новосибирск 1980.
- 78. Бишаев А.М., Рыков В.А. Решение стационарных задач кинетической теории газов при умеренных и малых числах Кнудсена методом итераций // Численные методы в динамике разреженных газов. Вып. 2, ВЦ АН СССР. М., 1975
- 79. *Harlow F.H.* A numerical method particles in cells for the solution on hydrodynamics problems // Foundamental method in hydrodynamics.Vol. 3, Acad. Press, N. 4, London, 1964.
- 80. *Gentry R.A., Harlow F.H., Martin R.E.* Computer experiments for molecular dynamics problems // Methods in Computational Physics. Vol.4. Applications in Hydrodynamics. 1965.
- 81. *Pullin D.J.* Direct simulation methods for compressible Juviscied ideal-gas flow // J. of Comput. Phys. 1980. V.34, N2. P.231–244.
- 82. *Khlopkov Ju.I.* Monte-Karlo procedure for the solution of rarefied gas dynamics problems // XIII Int. Symp. on DRG, Novosibirsk, book of Abstract. V.2, 1982.
- 83. *Коган М.Н., Кравчук А.С., Хлопков Ю.И.* Метод "релаксации—перенос" для решения динамики газа в широком диапазоне разрешенности сферы // Ученые зап. ЦАГИ. № 2, 1988.
- 84. Алексеева Е.В., Баранцев Р.Г. Локальный метод аэродинамического расчета в разреженном газе. М.: изд. ЛГУ, 1976.
- 85. Галкин В.С., Ерофеев А.И., Толстых А.И. Приближенный метод расчета аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом разреженном газе // Труды ЦАГИ. Вып. 1833. 1977.

- 86. Бунимович А.И., Чистолинов В.Г. Аналитический метод определения аэродинамических характеристик тел в гиперзвуковом потоке газа различной разреженности // Труды ЦАГИ. Вып.1833, 1977.
- 87. Пономарев В.Я., Серегин В.С. Расчет на основе гипотезы локального взаимодействия аэродинамических характеристик сложных тел при их стационарном и нестационарном движении в разреженном газе // Труды IV Всесоюзн. конференции по динамике разреженного газа и молекулярной газовой динамике. Изд. ЦАГИ, 1977.
- 88. Закиров М.А. Исследование внутренних и внешних свободномолекулярных течений около произвольной группы сложных тел // Труды ЦАГИ. Вып. 1411, 1972.
- 89. *Басс В.П.* Расчет обтекания потоком сильно разреженного газа с учетом с взаимодействия с поверхностью // Изв. АН СССР. МЖГ. N 5, 1978.
- 90. Ковтуненко В.Н., Камеко В.Ф., Яскевич Э.П. Аэродинамика орбитальных космических аппаратов. Киев: Наукова Думка. 1977.
- 91. *Баранцев Р.Г.* Вариант локального метода для тонких тел в разреженном газе. ЛГУ, N 13, 1982.
- 92. Баранцев Р.Г. Локальная теория передачи импульса и энергии на поверхность в разреженном газе // Математические модели, Аналитические и численные методы в теории переноса. Минск, 1982.
- 93. Закиров М.А., Омелик А.И., Хлопков Ю.И. Теоретическое и экспериментальное исследование аэродинамических характеристик простых тел в гиперзвуковом и свободномолекулярном потоке. VI Всесоюзн. конференция по ДРГ. Сб. Аннот. Новосиб. 1979.
- 94. *Хлопков Ю.И*. Методика и программа расчета на ЭВМ характеристик летательных аппаратов в свободномолекулярном режиме// Труды ЦАГИ. Вып.2111. 1981.
- 95. Еремеев Е.В., Хлопков Ю.И. Инженерная методика расчета на ЭВМ аэродинамических характеристик тел сложной реформы при полете в переходном режиме // Междуведомств. сборник. М., МФТИ, 1988.
- 96. Еремеев Е.В., Хлопков Ю.И. Совершенствование инженерной методики расчета аэродинамических характеристик тел сложной реформы в переходном режиме. Матер. XXXIII научной конф. МФТИ, М., 28 ноября 1988. Деп. ВИНИТИ.

- 97. Власов В.И., Горелов С.Л., Коган М.Н. Математический эксперимент для вычисления коэффициентов переноса // ДАН СССР. 1968. Т. 176.
- 98. Хлопков Ю.И. Вычисление коэффициентов переноса и скорости скольжения для молекул в виде твёрдых сфер. Изв. АН СССР. МЖГ. 1971. № 2.
- 99. *Власов В.И., Хлопков Ю.И.* Вариант метода Монте-Карло для решения линейных задач динамики разреженного газа // ЖВМ и МФ АН СССР. 1973. № 4.
- 100. Иванов М.С. Статистическое моделирование гиперзвуковых течений разреженного газа. Диссертация на соискание доктора физ.-мат. наук, Новосибирск, 1992
- 101. Хлопков Ю.И. Диссертация на соискание доктора физ.-мат. наук, М., 1998
- 101. Перепухов В.А. Решение методом Монте-Карло модельного кинетического уравнения // Учён. зап. ЦАГИ, № 4, 1973.
- 102. *Горелов С.Л., Коган М.Н.* Решение линейных задач динамики разреженного_газа методом Монте-Карло // Изв. АН СССР, МЖГ. № 6. 1967.
- 103. Reynolds M.A., Smoldern J.J., Wendt J.F. Velocity Profile Measurement in the Knudsen Layer for the Kramers Prodlem// RGD Symposium. Gettinem, Germany, 1973.
- 104. *Коровкин О.Н., Хлопков Ю.И*. Решение задачи слое Кнудсена с медленной конденсацией (испарением) на поверхности // Изв. АН СССР, МЖГ. 1974. № 4.
- 105. Сопротивление сферы в потоке разреженного газа малой скорости. Ученые зап. ЦАГИ. 1975. Т. 6, N 5.
- 106. *О броуновском движении* в разреженном газе // ДАН СССР. 1955. Т. 222, N 3.
- 107. *Broadwell J.E., Rungaldier H.* Chock layer in cylinders, spheres and wedgesin low density supersonic flow // Rept. 66-3320, 4-10, Dec. 1966, TRW System.
- 108. *Гусев В.Н., Коган М.Н., Перепухов В.А,* О подобии и применении аэродинамических характеристик в переходной области при гиперзвуковых скоростях // Учён. зап. ЦАГИ. 1970. Т. 1, № 1.
- 109. Никольский Ю.В., Хлопков Ю.И. Теоретическое и экспериментальное исследование обтекания сферы потоком малой плотности с учетом испарения и конденсации с поверхности. Учен. зап. 1989. ЦАГИ, N 5.

- 110. Никольский Ю.В., Хлопков Ю.И. Влияние испарения (конденсации) на аэродинамическое сопротивление // XV Всесоюзная конференция «Актуальные вопросы физики аэродисперсных сред», 1989.
- 111. *Khlopkov Yu. I., Nikolsky Yu.* V. Theoretical and experimental investigations of supersonic low density flow over the sphere with surface condensation and evaporation // TsAGI Journal, N.-Y. 1994. N3.
- 112. *Абрамов А.А., Кравчук А.С.* Действие теплового импульса на поверхность в тангециальном потоке // Известия РАН. МЖГ. 1994. № 1. С.139.
- 113. Четверушкин Б.Н. Кинетически-согласованные разностные схемы в газовой динамике. М.: Изд-во МГУ, 1999.
- 114. *Волчинская М.И., Павлов А.Н., Четверушкин Б.Н.* Об одной схеме расчета газодинамических уравнений / Препринт N 113 ИПМ им. М.В.Келдыша АН СССР, 1983.
- 115. *Абалакин И.В., Четверушкин Б.Н.* Кинетически-согласованные разностные схемы как модель для описания газодинамических течений // Математическое моделирование. 1996. Т.8. № 8. С.17.
- 116. *Т.Г. Елизарова, Б.Н. Четверушкин.* Кинетические алгоритмы для расчета газодинамических течений. ЖВМ и МФ. 1985, т. 25, N 10, c. 1526.
- 117. *Колган В.П.* Применение принципа минимальных значений производной к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. 1972. Т.3. \mathbb{N} 6. С.68.
- 118. *Крупа В.Г.* О построении разностных схем повышенного порядка точности для гиперболических уравнений // ЖВМиМФ. 1998. Т.38. №1. С.85.
- 119. *Lax P*. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation // Communs Pure and Appl. Math. 1954. V.7. P.159–201.
- 120. Chakravarthy S.R., Engquist B., Harten Ami, Osher S. Uniformly high order accurate schemes // J. Comput. Phys. 1987, V.71 P. 231–303.
- 121. *Белоцерковский О.М.* // Вычислительная математика. 1957, сб.3.
- 122. Абрамов А.А., Кравчук А.С., Поддубный В.В. Статистическое моделирование поверхностного выдува газа в набегающий поток // ЖВМиМФ. 1991. Т.31, № 12. С.1849.

- 123. *Хлопков Ю.И., Горелов С.Л.* Методы Монте-Карло и их приложение в механике и аэродинамике // Учебное пособие. М.: $M\Phi T U$, 1989.
- 124. *Абрамов А.А.* Прямое статистическое моделирование стационарных течений газа при малых числах Кнудсена // Известия АН СССР. МЖГ. 1986. № 4. С.138.
- 125. *Хлопков Ю.И.*, *Горелов С.Л*. Приложение методов статистического моделирования (Монте-Карло) // Учебное пособие. М.: $M\Phi T U$. 1994.
- 126. *Георгиевский П.Ю.*, *Левин В.А*. Сверхзвуковое обтекание тела при подводе тепла перед ним // Труды МИАН. 1989. Т.186. С.197.
- 127. Георгиевский П.Ю., Левин В.А. Сверхзвуковое обтекание тел при наличии внешних источников тепловыделения // Письма в ЖТФ. 1988. Т.14, вып.8. С.684.
- 128. *Численное* исследование современных задач газовой динамики: Сб. науч. тр. // Ред. О. М. Белоцерковский / М.: Наука, 1974.
- 129. Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988.
- 130. *Артемьев В.И., Бергельсон В.И. и др.* Эффект "тепловой иглы" перед затупленным телом в сверхзвуковом потоке // Доклады АН СССР. 1990. Т. 310. № 1. С.47.

Научное издание

ХЛОПКОВ Юрий Иванович

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ АЭРОДИНАМИКЕ

Редакторы: В.А. Дружинина, О.П. Котова. Корректор И.А. Волкова

Московский физико-технический институт (государственный университет) 141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9 ООО «Азбука-2000» 109544, Москва, ул. Рабочая, д.84

Подписано в печать 04.10.2006. Формат $60 \times 84^{-1}/_{16}$. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,8. Уч. -изд. л. 10,8. Тираж 999 экз. Заказ № .

Отпечатано в ОАО «Ярославский полиграфкомбинат» 150049, Ярославль, ул. Свободы, 97