

Содержание:

Введение.....	2
1. Общие свойства струй.....	4
2. Аэродинамические характеристики сверхзвуковых струй.....	7
3. Описание метода расчета.....	9
3.1 Осреднение уравнений Рейнольдса.....	9
3.2 Энергетическое уравнение турбулентности.....	12
3.3 Приближение Буссинеска.....	13
3.4 $k - \varepsilon$ модель.....	14
3.5 Численные схемы Fluent.....	17
4. Краткое описание численной схемы для решения уравнений Рейнольдса.....	21
5. Описание расчетной сетки.....	34
6. Постановка задачи.....	38
7. Результаты	
7.1 Средние параметры скорости и давления.....	39
7.2 Размывание гофрировки	42
7.3 Эволюция тангенциальной компоненты скорости.....	45
8. Выводы и результаты.....	46
9. Список литературы	47

Введение

Согласно современным представлениям, одним из основных источников акустического излучения в сверхзвуковых струях являются пакеты волн неустойчивости, развивающиеся вниз по потоку. Такие представления позволили объяснить и рассчитать основные характеристики излучения звука круглыми сверхзвуковыми струями. Одна из основных целей развития таких представлений связана с поиском путей обобщения такого подхода на струи, имеющие гофрированную форму (s -лепестковая деформация круговой формы сечения). Наличие дополнительного параметра, связанного с длиной волны гофра, может приводить к появлению резонансной связи различных волн неустойчивости. Эти эффекты могут служить причиной как интенсификации, так и, наоборот, подавления аэродинамического шума. Малость амплитуды гофрировки по отношению к радиусу кругового сечения струи позволяет проводить аналитическое исследование проблемы с помощью методов теории возмущений.

Основная задача в настоящий момент связана с поиском резонансных режимов, при которых гофрировка *малой* амплитуды оказывает *конечное* влияние на структуру волн неустойчивости в случае гофрированного цилиндрического тангенциального разрыва (моделирующего начального участка слоя смещения в струе), разделяющего однородный сверхзвуковой поток и покоящуюся среду. Было показано, что появление малой гофрировки сечения круглой струи (учитывалось только первое приближение по малой амплитуде гофрировки) приводит одновременно к двум эффектам – конечной связи между различными азимутальными гармониками с номерами, отличающимися друг от друга на целое число гофров, и близком подходе их продольных волновых чисел при не малых числах Струхала в зависимости от числа Маха, номера азимутальной гармоники и числа гофров.

Однако сечение струи является гофрированным только на начальном участке струи. Влияние слоя смещения должно уменьшить гофрированность струи, что обеспечит круговое сечение струи вниз по потоку. Тем не менее,

даже слабая гофрировка в начальном участке струи может сильно влиять на возмущенное поведение. Разные азимутальные гармоники гофрированного вихревого слоя (соответствующая модель начального участка струи) являются спаренными. Другими словами, эйженевские моды состоят не из одиночных гармоник, а из смеси различных гармоник. Кроме того, в случае резонансного спаривания, эта смесь содержит две различные гармоники в первом порядке приближения по параметру гофрировки, так называемое сильное смешение двух гармоник.

Для реализации основной идеи связывания мод на начальном участке струи необходимо знать области занятые гофрированной струей и области, где струя становится круглой. В этом случае решение на начальном участке, где моды резонансно взаимодействуют, может быть сращено с известным решением для круглой струи. При отсутствии такой информации нельзя замкнуть общий метод расчета шума гофрированной струи, поскольку никаких предварительных данных о соотношении областей к настоящему моменту нет. Имеется две возможности для получения этой информации: проведение тщательного эксперимента связанного с изготовлением гофрированных сопел и проведением дорогостоящего эксперимента; (ii) проведение подробного численного исследования задачи с помощью имеющихся в настоящее время возможностей современных «солверов». Основная задача, которая была поставлена в настоящей работе, относится ко второму направлению – получить основные характеристики среднего и пульсационного поля течения в гофрированной струе и определить протяженность гофрированной зоны с помощью мощных средств современной вычислительной техники. Получение такой информации вычислительными методами дает новое направления применения вычислительных средств в задачах аэроакустики, поскольку позволяет адаптировать известные аналитико-численные методики, основанные на представлениях о волнах неустойчивости, к рассмотрению струй сложной конфигурации.

I. Общие свойства струй

Во многих случаях движения жидкости и газа в потоке возникают так называемые поверхности тангенциального разрыва; течения жидкости по обе стороны такой поверхности называются струйными. В зависимости от относительного направления движения струй они могут быть спутными или встречными. Характерной особенностью струйных течений является то, что тангенциальный разрыв на поверхности раздела терпят такие, например, величины, как скорость течения, температура, концентрация примеси, тогда как распределение статического давления оказывается непрерывным.

На поверхности тангенциального разрыва в связи с ее неустойчивостью возникают вихри, беспорядочно движущиеся вдоль и поперек потока; вследствие этого между соседними струями происходит обмен конечными массами (молями) вещества, т.е. поперечный перенос количества движения, тепла и примесей. В результате на границе двух струй формируется область конечной толщины с непрерывным распределением скорости, температуры и концентрации примеси; эта область называется *струйным турбулентным пограничным слоем*. При очень малых числах Рейнольдса струйный пограничный слой может быть ламинарным, но на этом сравнительно редком случае течения мы не останавливаемся.

Наиболее простой случай струйного пограничного слоя имеет место при истечении жидкости с равномерным начальным полем скорости (u_0) в среду, движущуюся с постоянной скоростью (u_n), так как при этом в начальном сечении струи толщина пограничного слоя равна нулю. Утолщение струйного пограничного слоя, состоящего из увлеченных частиц окружающей среды и замороженных частиц самой струи, приводит, с одной стороны, к постепенному «съеданию» потенциального ядра струи - области, лежащей между внутренними границами пограничного слоя.

Принципиальная схема такого струйного течения изображена на рис.1. Часть

струи, в которой имеется потенциальное ядро течения, называется *начальным* участком.

Как показывают многочисленные опыты, одним из основных свойств такой струи является постоянство статического давления во всей области течения, вследствие чего скорость в потенциальном ядре струи остается постоянной. Размывание струи за пределами начального участка выражается не только в ее утолщении, но также и в изменении скорости вдоль ее оси.

На некотором расстоянии от конца начального участка струйное течение приобретает такой же вид, как течение жидкости из источника бесконечно малой толщины (в осесимметричном случае источником служит точка, в плоскопараллельном случае - прямая линия, перпендикулярная к плоскости растекания струи); соответствующий участок струи называется *основным*. Между *основным* и *начальным* участками струи располагается так называемый *переходный* участок.

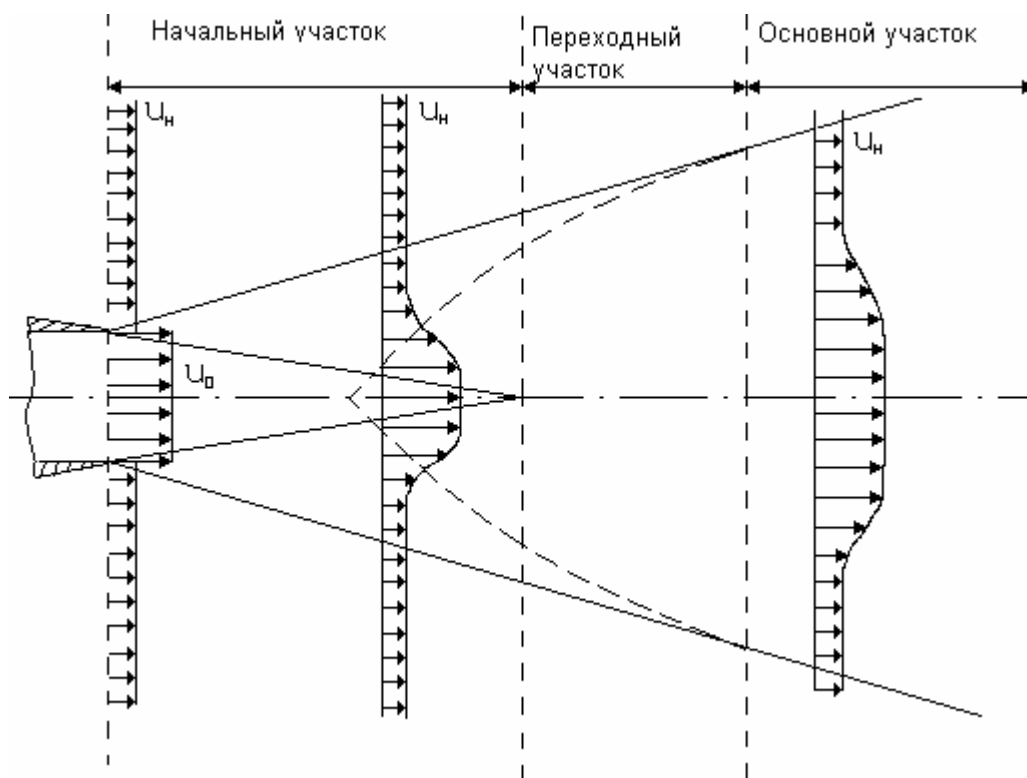


Рис.1. Схема течения в струе.

Часто пользуются упрощенной схемой струи и полагают длину переходного участка равной нулю; в этом случае сечение, в котором сопрягаются основной и начальной участки, называют *переходным сечением* струи. Если в расчетах переходный участок учитывают, то переходное сечение считают совпадающим с началом основного участка.

Наиболее изученным видом турбулентного струйного течения является струя, распространяющаяся в покоящейся среде; такая струя называется *затопленной*.

В описанной схеме струи предполагается, что пограничный слой имеет конечную толщину; в некоторых теориях затопленной струи принимается пограничный слой бесконечной толщины с асимптотическими профилями скорости, температуры и других величин. Оба эти представления о пограничном слое удастся практически примирить между собой, так как асимптотический пограничный слой можно всегда приближенно заменить слоем конечной толщины.

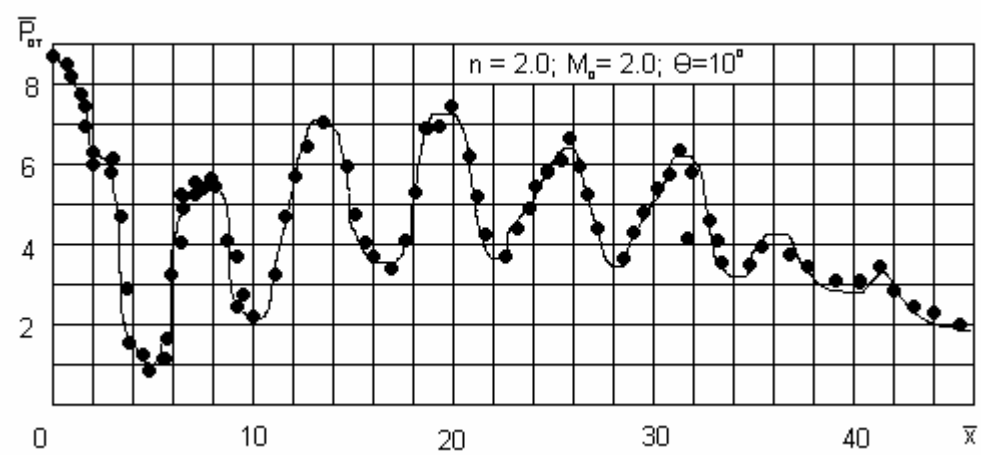
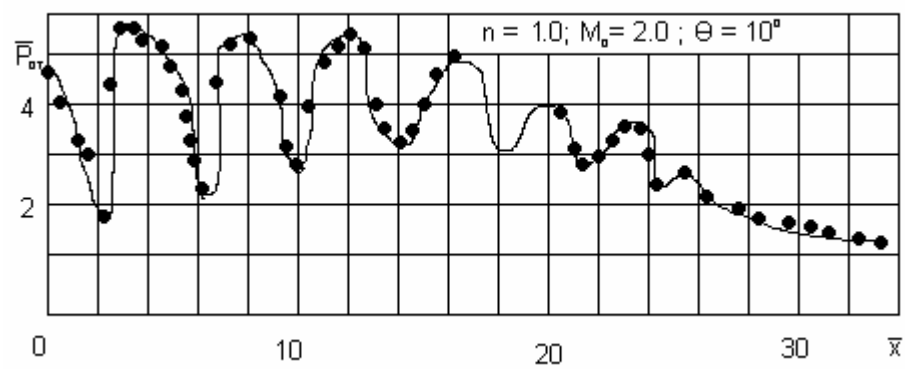
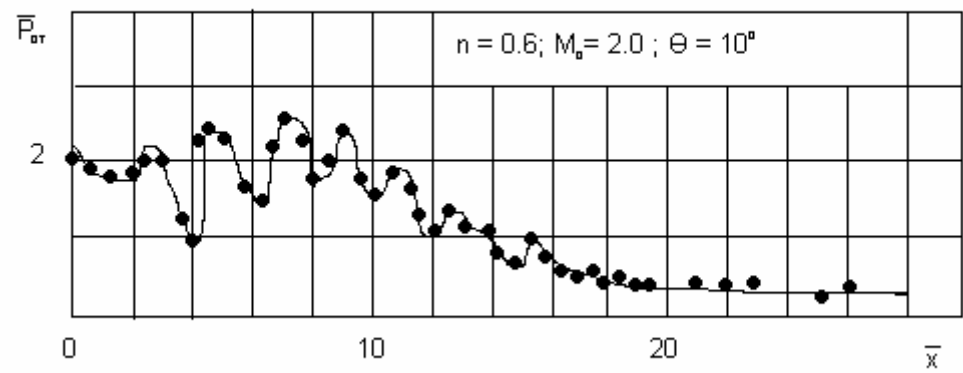
Характерной особенностью турбулентной струи, как показывают теория и многочисленные опыты, является малость поперечных составляющих скорости в любом сечении струи по сравнению с продольной скоростью. Следовательно, если ось X совместить с осью симметрии струи, то составляющие скорости по оси Y окажутся настолько малыми, что в инженерных приложениях теории струй ими можно пренебречь.

II. Аэродинамические характеристики сверхзвуковых турбулентных струй.

Сверхзвуковая неизобарическая турбулентная струя представляет собой сложный газодинамический объект и характеризуется сильной пространственной неоднородностью полей скоростей и давлений которая обусловлена наличием системы скачков уплотнения и сдвиговых слоев с большими градиентами скорости. Сильная пространственная неоднородность способствует развитию неустойчивости, приводящей к интенсивным пульсациям скорости и давления, а формирование цепи обратной связи – к развитию автоколебаний, в результате которых в спектрах пульсаций появляются интенсивные дискретные составляющие.

Течение в сверхзвуковой затопленной струе обычно характеризуют критериями подобия: степенью нерасчетности истечения $n = p_a / p_\infty$, числом Маха на срезе сопла $M_0 = u_0 / a_0$ и углом наклона контура сопла в выходном сечении θ_0 . Здесь p_a и p_∞ соответственно статическое давление на срезе сопла и в окружающей среде, u_0 и a_0 - скорость истечения и скорость звука. При этом различают три режима: $n = 1$ - расчетный режим, $n < 1$ - режим перерасширения и $n > 1$ режим недорасширения.

При нерасчетных режимах истечения сверхзвуковая затопленная струя характеризуется системой скачков уплотнения на ее газодинамическом участке. Наличие близкой к периодической системы скачков уплотнения на газодинамическом участке сверхзвуковых нерасчетных струй приводит к волнообразному изменению полного давления вдоль оси струи. За начальным газодинамическим участком следует переходной участок, и, наконец, основной участок с изобарическим течением и максимум скорости на оси струи, как в обычной дозвуковой изобарической турбулентной струе. Следует отметить, что при истечении струи из сопла Лаваля на расчетном режиме периодическая структура сверхзвуковой струи не реализуется.



III Описание метода расчета.

В настоящей работе используется один из многочисленных методов численного моделирования турбулентных течений.

Поскольку турбулентность состоит из произвольных флуктуаций разных параметров потока, мы используем статистический подход. Это предположение лучше всего описывается методом Рейнольдса, предложенным в 1895. В этом методе все величины выражаются в виде суммы средней и флуктуационной компонент. Решение нелинейных уравнений Рейнольдса приводит переносу момента, который действует как напряженность в потоке. Изначально, значение переноса импульса не определено. Затем мы выводим уравнения для этих напряжений, которые включают другие неизвестные величины. Это яркий пример незамкнутости задачи, т.е. когда количество неизвестных не равно количеству уравнений. В качестве замыкания, используются различные математические модели турбулентности.

Осреднение уравнений Рейнольдса.

Осреднение уравнений Рейнольдса будем проводить по времени. Осреднение произвольной функции в общем виде имеет следующий вид:

$$F_T(x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(x,t) dt$$

Уравнения сохранения импульса и массы:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.1)$$

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial t_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.2)$$

где u_i и x_i - компоненты скорости и координаты, t – время, p – давление, ρ – плотность, а t_{ij} - тензор вязкости, который определяется:

$$t_{ij} = 2\mu s_{ij}$$

где μ это коэффициент молекулярной вязкости, а s_{ij} это тензор напряжений,

$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.3)$$

Заметим, что $s_{ij} = s_{ji}$, таким образом $t_{ij} = t_{ji}$ для обычной вязкой жидкости.

Для того чтобы упростить осреднение по времени, перепишем члены уравнения сохранения:

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) \quad (1.4)$$

Здесь мы отдаем предпочтение сохранению массы, для того, чтобы

исключить член $u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$. Объединяя уравнения (1.2) и (1.4), получим

уравнение Навье-Стокса в такой форме:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j u_i) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (2\mu s_{ji}) \quad (1.5)$$

Усреднение по времени уравнений (1.1) и (1.5) приводит уравнениям Рейнольдса для средних величин:

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.6)$$

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} \left(U_j U_i + \overline{u'_j u'_i} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\mu S_{ji} \right) \quad (1.7)$$

Уравнение сохранения массы (1.6) для средних величин идентично мгновенному уравнению (1.1) где вместо мгновенной скорости стоит осредненная по времени. Сравнение уравнений (1.1) и (1.6) показывает, что дивергенция флуктуационной компоненты скорости u'_i также равна нулю.

Кроме того, единственное отличие при подстановке осредненных значений вместо мгновенный в уравнение (1.2) – это появление корреляционного члена $\overline{u'_i u'_j}$. Это осредненная по времени скорость изменения импульса, вызванная явлением турбулентности.

Здесь то и заключается основания проблема турбулентности: Для того чтобы посчитать все средние параметры турбулентного течения, необходима гипотеза, по которой можно вычислить $\overline{u'_i u'_j}$.

Уравнение (1.7) может быть переписано в наиболее известной форме, используя уравнение (1.4).

$$\rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(2\mu S_{ji} - \rho \overline{u'_j u'_i} \right) \quad (1.8)$$

Это уравнение обычно называют: Усредненное Рейнольдсом уравнение Навье-Стокса (RANS).

Член уравнения $-\rho \overline{u_j' u_i'}$ обычно называют тензором напряжений

Рейнольдса, и записывают в таком виде:

$$\rho \tau_{ij}, \text{ где } \tau_{ij} = -\overline{u_j' u_i'}$$

Определим тензор $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ (симметричный тензор), таким образом, мы

имеем шесть независимых компонент. Однако путем осреднения рейнольдса получилось шесть неизвестных величин. К сожалению, мы не получили никаких дополнительных уравнений. Теперь, в общем случае для трехмерного течения, мы имеем 4 средних параметра: давление и три компоненты скорости. Вместе с шестью компонентами тензора рейнольдса мы имеем 10 неизвестных. Уравнения. Которые мы имеем - это уравнение сохранения массы и три покомпонентных уравнения (1.8). Это означает, что наша система не замкнута. Для того чтобы замкнуть систему мы должны найти достаточно уравнений, чтобы определить все переменные. В нашем случае, воспользуемся одной из моделей турбулентности – k-ε моделью.

Энергетическое уравнение турбулентности.

В 1945 году Прандтль предложил считать характеристикой турбулентности

$v_{\max}$. Таким путем можно избежать предположения что $v_{\min} \approx l_{\min} \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|$. В

качестве единицы шкалы скоростей Прандтль выбрал кинетическую энергию турбулентных флуктуаций на единицу массы.

$$k = \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i'} = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right)$$

Таким образом, можно определить добавочную турбулентную вязкость в терминах турбулентной шкалы скоростей:

$$\nu_T = \text{constant} * k^{1/2} l$$

Теперь возникает вопрос, как определить k . Ответ можно получить, воспользовавшись уравнением для тензора рейнольдса:

$$\tau_{ii} = -\overline{u_i' u_i'} = -2k \quad (1.9)$$

Таким образом, тензор рейнольдса пропорционален кинетической энергии турбулентных флуктуаций на единицу объема. Величина k обычно называется турбулентной кинетической энергией.

Можно выписать уравнение переноса для кинетической турбулентной энергии:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \frac{\partial k}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \overline{u_i' u_i' u_j'} - \frac{1}{\rho} \overline{p' u_j'} \right] \quad (1.10)$$

Величина ε называется диссипацией энергии на единицу массы и определяется так:

$$\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k} \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} \quad (1.12)$$

В 1935 году Тейлор показал, что

$$\varepsilon \approx k^{3/2} / l$$

Уравнение (1.10) можно записать еще так:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_T / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (1.11)$$

Приближение Буссинеска.

Для дальнейших расчетов необходимо воспользоваться предположением Буссинеска. В его модели тензор напряжений рейнольдса выписывается следующим образом:

$$\tau_{ij} = 2\nu_T S_{ij} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (1.13)$$

где S_{ij} осредненный тензор напряжений. Отметим, что второй член в правой части уравнении (1.13) необходим, для того, чтобы получить правильный след τ_{ij} . То есть, если $S_{ii} = 0$ для несжимаемого потока, то $\tau_{ii} = -2k$ (см. 1.9).

$k - \varepsilon$ Модель.

Наиболее популярная модель турбулентности это $k - \varepsilon$ модель.

Начнем с уравнений (1.11) и (1.13). Основная идея модели состоит в выводе уравнений для ε и в замыкании начальных уравнений Навье-Стокса.

Величина ε определяется (1.12).

Дополнительное уравнение для ε выводится при использовании уравнений Навье-Стокса:

$$\overline{2v \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} [N(u_i)]} = 0$$

где $N(u_i)$ это оператор Навье-Стокса:

$$N(u_i) = \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}$$

После некоторых алгебраических преобразований, получаем уравнение для ε :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = & -2v \left[\overline{u'_{i,k} u'_{j,k} + u'_{k,i} u'_{k,j}} \right] \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - 2v \overline{u'_k u'_{i,j}} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_j} - \\ & - 2v \overline{u'_{i,k} u'_{i,m} u'_{k,m}} - 2v^2 \overline{u'_{i,km} u'_{i,km}} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} - v \overline{u'_j u'_{i,m} u'_{i,m}} - 2 \frac{v}{\rho} \overline{p' m'_{j,m}} \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Это уравнение гораздо сложнее обычного уравнения для турбулентной кинетической энергии и включает в себя несколько новых неизвестных двойных и тройных корреляций флуктуационной скорости, давления и градиента скорости. Члены в трех строках правой части обычно называют: Результат диссипации, Диссипация диссипации и сумма Молекулярной диффузии диссипации и Турбулентного переноса диссипации,

соответственно. Очевидно, что такие корреляции невозможно измерить с любой степенью точности, но есть надежда воспользоваться достоверными аппроксимированными данными экспериментов. В своей работе Мансур, Ким и Моин [Mansour, Kim, Moïn] 1988г смогли получить уравнения переноса ε для потоков с малыми числами Рейнольдса. Однако случаи аппроксимаций для замыкания уравнений, сходные с теми, что существуют для k , очень редки. Основной вывод, который можно уверенно сделать, это то, что замыкающие аппроксимации в уравнении (1.14) верны с точки зрения размерности. Следует всегда помнить золотое правило: следует избегать моделирования дифференциальных уравнений, а не физической турбулентности. Это не значит, что нужно избегать всякой ссылки на дифференциальные уравнения, но можно получить модель, которая противоречит основным физическим чертам уравнений Навье-Стокса. Следует избегать самообмана, полагая, что решительный хирургический подход к чему-то сложному типа уравнения (1.14) более строгий, чем метод размерностей.

Даже если мы получим точное замыкающее приближение для конкретного уравнения переноса диссипации, останется серьезный вопрос его применимости для основополагающей проблемы замыкания. Потребуется шкала длинны или времени для уравнений энергии, тензор напряжений Рейнольдса, а не диссипация, которая получается из уравнения для ε . Таким образом, стоит задаться вопросом, описывает ли диссипацию вихрей как таковую смоделированное уравнение для ε [уравнение (1.14) моделирует], или это скорее эмпирическое уравнение для скорости переноса энергии от больших вихрей.

Ответ очевиден, поскольку аппроксимация замыкания, которую обычно используют, параметризует различные члены в смоделированных ε -уравнениях, как функции больших вихревых структур. Использование метода размерностей явно отвечает на этот вопрос. В заключении хочется сказать, что связь между смоделированным уравнением для ε и точным

уравнением так неочевидна, что не требует серьезного рассмотрения.

Стандартная

$k - \varepsilon$ модель заключается в следующем:

Кинематическая вязкость:

$$\nu_T = C_\mu k^2 / \varepsilon \quad (1.15)$$

Турбулентная кинетическая энергия:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \nu_T / \sigma_k) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] \quad (1.16)$$

Скорость диссипации:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + U_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \tau_{ij} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \nu_T / \sigma_k) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] \quad (1.17)$$

Коэффициенты замыкания и вспомогательные соотношения:

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92, \quad C_\mu = 0.09, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (1.18)$$

$$\omega = \varepsilon / (C_k k) \quad \text{и} \quad l = C_\mu k^{3/2} / \varepsilon \quad (1.19)$$

Честно говоря, модель Лаундер-Шарма (1974) это Стандартная $k - \varepsilon$ модель.

Кроме уравнений, уже упомянутых, эта модель включает функции вязкого трения.

Наиболее современная версия $k - \varepsilon$ модели была разработана Якотом [Yakhot] и Орзагом [Orszag] в 1986г. Они применили методы теории ренормализации групп и разработали так называемую RNG $k - \varepsilon$ модель. В этой модели вязкость, k и ε по прежнему определяются уравнениями (1.15), (1.16) и (1.17). Однако в методе используются другие коэффициенты:

$$C_{\varepsilon 2} \equiv \tilde{C}_{\varepsilon 2} + \frac{C_\mu \lambda^3 (1 - \lambda / \lambda_0)}{1 + \beta \lambda^3}, \quad \lambda \equiv \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{2 S_{ij} S_{ji}} \quad (1.20)$$

Коэффициенты замыкания для RNG $k - \varepsilon$ модели:

$$C_{\varepsilon 1} = 1.42, \quad \tilde{C}_{\varepsilon 2} = 1.68, \quad C_\mu = 0.085, \quad \sigma_k = 0.72, \quad \sigma_\varepsilon = 0.72 \quad (1.21)$$

$$\beta = 0.012, \quad \lambda_0 = 4.38 \quad (1.22)$$

Обзор численных схем.

Fluent предлагает использовать одну из двух численных схем:

- Segregated solver
- Coupled solver

Используя любой из этих методов, решаются основные уравнения для сохранения массы, импульса, и (где это возможно) энергии и других скалярных величин, таких как турбулентность и химический состав. В обоих случаях используется метод контрольных объемов, который заключается в следующем:

- Разделение области на контрольные объемы, используя расчетную сетку.
- Объединение основных уравнений для отдельных ячеек для того, чтобы сформировать алгебраические уравнения для независимых величин, таких как скорости, давление, температура и сохраняющиеся константы.
- Лианеризация разделенных уравнений и решение получившейся линейной системы уравнений, для того, чтобы вычислить значения зависимых величин.

Обе численные схемы используют одинаковый метод дискретизации (метод конечных объемов), а вот механизм линеаризации и решения разделенных уравнений различный.

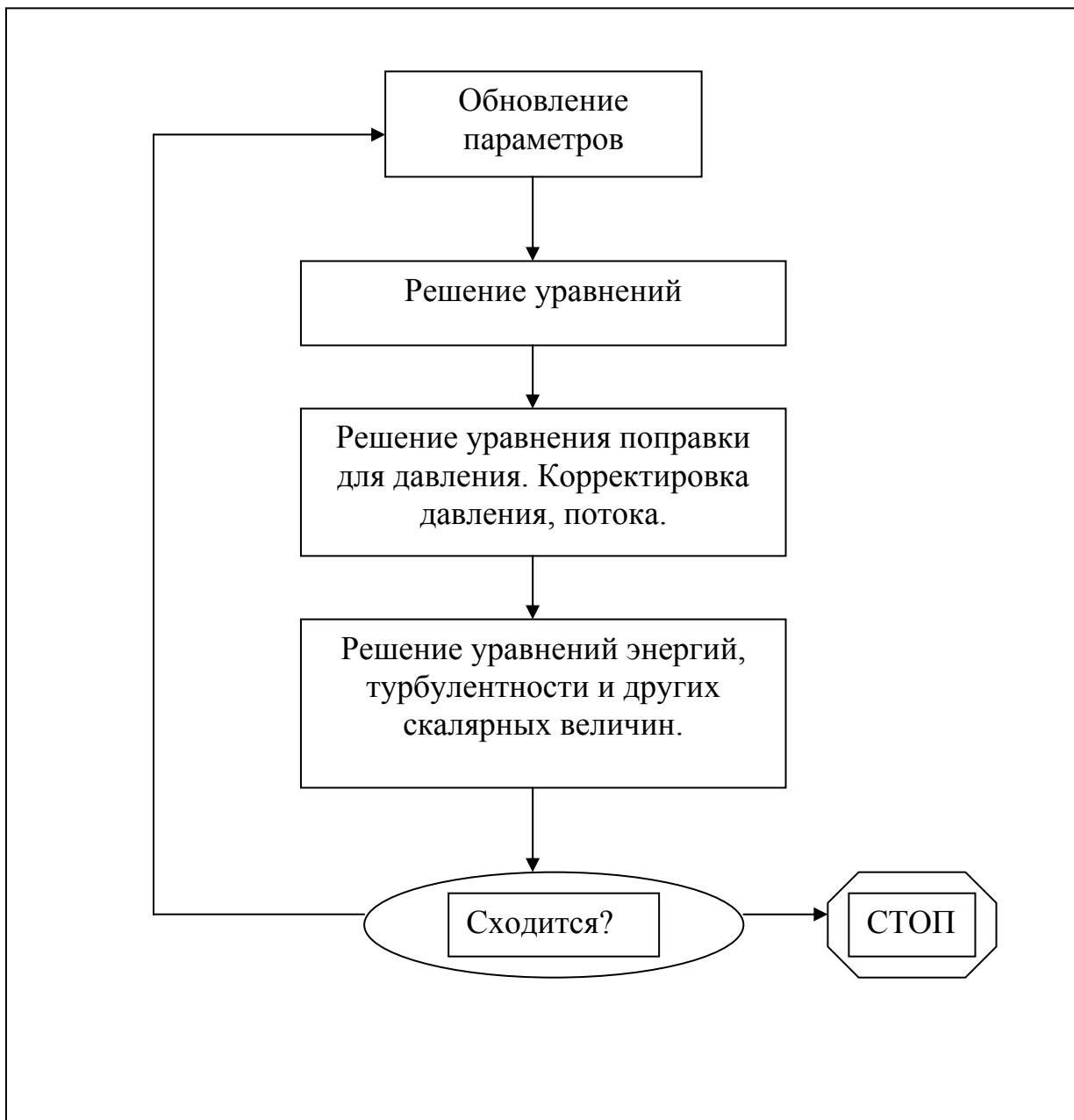
Segregated Solution Method

Основные уравнения в этом методе решаются последовательно (т.е. отдельно друг от друга).

Так как основные уравнения не линейные (и связанные), необходимо совершить несколько итераций, прежде чем будет получена сходимость решения.

Каждая итерация состоит из следующих шагов:

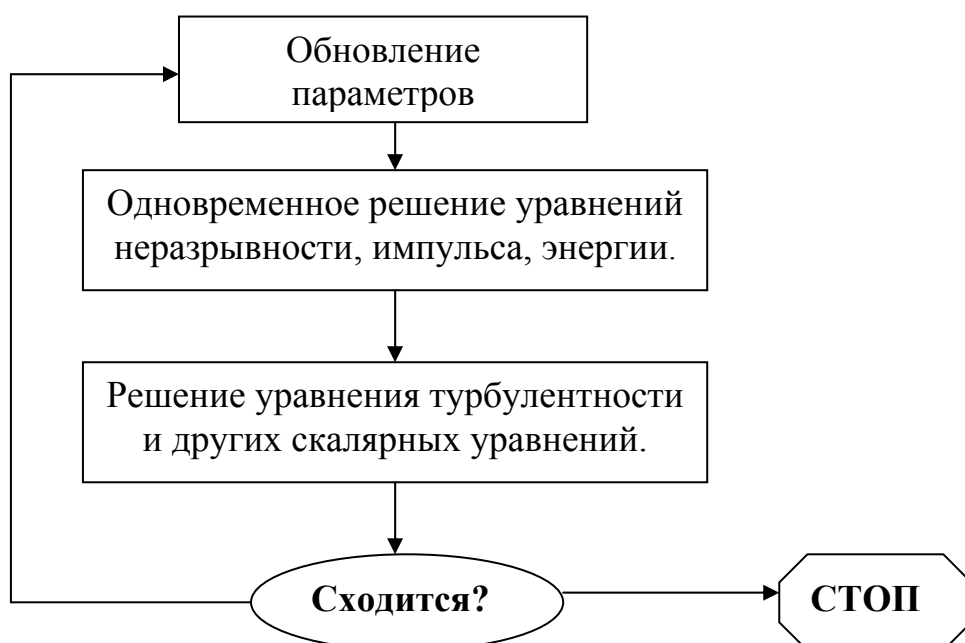
1. Изменение параметров, основываясь на текущем решении (Если решение только что начато, используются параметры, заданные в начальных условиях)
2. Решаются уравнения импульса для u , v и w компонент скорости, используя текущие значения давления и потока массы через поверхность. Обновляется поле скоростей.
3. Поскольку компоненты скорости, полученные на предыдущем шаге, могут не удовлетворять уравнению неразрывности, из уравнения неразрывности и линеаризованных уравнений импульса выводятся уравнение пуассоновского типа для корректировки давления. Полученные поправки используются для исправления давления, поля скоростей и массового расхода .
4. Где нужно, решаются уравнения для скаляров, таких как турбулентность, энергия, и излучение, используя поправленные величины.
5. Проверка сходимости уравнений.



Coupled Solution Method

Этот метод решает основные уравнения неразрывности, импульса, и (где необходимо) энергии и переноса одновременно (т.е. совместно друг с другом). Основные уравнения для дополнительных скалярных величин решаются последовательно, используя процедуру, описанную для метода segregated solver. Так как основные уравнения нелинейные (и связанные), следует совершить несколько итераций, перед тем, как будет получено сходящееся решение. Каждая итерация состоит из следующих шагов:

1. Изменение параметров, основываясь на текущем решении (Если решение только что начато, используются параметры, заданные в начальных условиях).
2. Одновременно решаются уравнения неразрывности, импульса, (где необходимо) энергии.
3. Где необходимо, решаются уравнения турбулентности и излучения, используя значения, полученные на предыдущем шаге.
4. Проверка сходимости уравнений.



IV. Краткое описание численной схемы для решения уравнений Рейнольдса.

Систему уравнений Рейнольдса можно представить в векторном виде следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}_k(\vec{u})}{\partial x_k} = \vec{W}(\vec{u}) \quad (2.1)$$

В системе (2.1):

- 1) $\vec{u} = \left[\bar{\rho}; \bar{\rho} \tilde{u}_i; \bar{\rho} p_k^{turb} \right]^T$;
- 2) $p_k^{turb}, k = 1, \dots, N_{turb}$ - параметры турбулентности. Например, в случае $(k - \varepsilon)$ модели $N_{turb} = 2, p_1^{turb} = \tilde{k}, p_2^{turb} = \varepsilon$;
- 3) $\vec{F}_k(\vec{u})$ - потоки вектора $\vec{u}$ в направлении оси x_k ; не будем расписывать их в деталях, а ограничимся указанием на то, что эти потоки зависят от параметров среднего течения и всевозможных турбулентных и молекулярных потоков:

$$\vec{F}_k = f(\underbrace{\bar{p}; \bar{\rho}; \tilde{u}_i, p_k^{turb}}_{\substack{\text{параметры} \\ \text{среднего} \\ \text{течения}}}; \underbrace{\tau_{ik}; \bar{q}_k; \dots}_{\substack{\text{молекулярные} \\ \text{потоки} \\ \text{импульса,} \\ \text{тепла и др.}}}; \underbrace{\tilde{R}_{ik}; \tilde{\sigma}_k; \dots}_{\substack{\text{турбулентные} \\ \text{потоки} \\ \text{импульса,} \\ \text{тепла и др.}}}) \quad (2.2)$$

- 4) $\vec{W}(\vec{u}) = \left[0; 0; 0; W(p_k^{turb}) \right]^T$ - источниковые члены, описывающие производство и диссипацию параметров турбулентности.

Посмотрим теперь, как эта система уравнений в частных производных решается численно.

В начале выбирается *расчетная область* – район течения, который нужно моделировать (нарисовать расчетную область для моделирования

отрыва турбулентного пограничного слоя из-под косого скачка уплотнения). Поскольку компьютер способен работать лишь с конечным объемом информации, он не сможет описать все бесконечное пространство точек. Поэтому расчетная область покрывается *расчетной сеткой*, и ставится задача найти параметры течения не во всех точках пространства, а лишь в центрах ячеек сетки (нарисовать расчетную область для моделирования отрыва турбулентного пограничного слоя из-под косого скачка уплотнения).

Расчет *стационарного* течения можно вести *методом установления*: сначала в качестве начального приближения задаем всюду в расчетной области невозмущенный поток. Далее этот поток начинает приспособляться к заданной нами геометрии течения. Этот нестационарный процесс описывается *нестационарной* системой уравнений (2.1). Но, поскольку граничные условия стационарны, то при $t \rightarrow \infty$ течение устанавливается, $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow 0$, и мы получаем решение стационарной задачи.

Таким образом, расчета и нестационарных, и стационарных течений нужно уметь решать численно нестационарную систему (2.1). Смотрите, как это делается. Для простоты я распишу схему для одномерного нестационарного случая (одна пространственная координата):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{u})}{\partial x} = \vec{W}(\vec{u}) \quad (2.3)$$

Физически это соответствует случаю нестационарного течения в трубе длиной L . В начальный момент времени мы задаваем распределение параметров среднего потока и параметров турбулентности вдоль трубы. Задача – рассчитать, как течение в трубе будет эволюционировать о времени.

Расчетная область в этом случае представляет собой отрезок $[0; L]$ оси x , расчетные ячейки – отрезки, образующие некоторое разбиение отрезка $[0; L]$. Для простоты будем считать, что разбиение равномерное, и длина

каждой ячейки равна h . Решение будем вести *маршем по времени*: в начальный момент времени мы знаем параметры в центре каждой ячейки на начальном временном слое $t = 0$; далее пытаемся найти параметры на временном слое $t = \tau$ (τ – шаг по времени); затем – на слое $t = 2\tau$, и .п. Будем нумеровать центры ячеек целыми индексами: $j = 1; 2; \dots; N$; узлы сетки (концы отрезков-ячеек) – полуцелыми индексами: $j = -1/2; 1/2; \dots; N+1/2$; временные слои – индексом $n = 0, 1, 2, \dots$

Предположим, что мы уже добрались до временного слоя n и знаем на этом слое параметры в центре каждой ячейки. Вопрос: как рассчитать параметры в центрах ячеек на следующем временном слое $n+1$?

Проинтегрируем систему уравнений (2.3) по площади S , которую занимает ячейка j при переходе от временного слоя n к слою $n+1$:

$$\iint_S \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}(\vec{u})}{\partial x} \right] dx dt = \iint_S \vec{W}(\vec{u}) dx dt$$

При помощи формулы Грина перейдем в левой части к контурному интегралу по контуру Γ , ограничивающему площадь S (в пространственном случае нужно перейти к поверхностному интегралу по формуле Гаусса-Остроградского):

$$\int_{\Gamma} [-\vec{u} dx + \vec{F} dt] = \iint_S \vec{W}(\vec{u}) dx dt \quad (2.4)$$

Теперь распишем интегральное равенство (2.4), приближенно заменяя интеграл по каждому отрезку контура $\Delta\Gamma = \int_{\Delta\Gamma} f d\Gamma$ - на $\langle f \rangle \cdot \Delta\Gamma$ - значение

функции f в середине этого отрезка (которое в случае линейного распределения параметров совпадает с интегральным средним по отрезку). Интеграл в правой части будем вычислять приближенно по

формуле трапеций: $\iint_S \vec{W}(\vec{u}) dx dt \approx \frac{\vec{W}_j^n + \vec{W}_j^{n+1}}{2} h \tau$. Получим:

$$-\vec{u}_j^n \cdot h + \vec{F}_{j+1/2} \cdot \tau + \vec{u}_j^{n+1} \cdot h - \vec{F}_{j-1/2} \cdot \tau = \frac{\vec{W}_j^n + \vec{W}_j^{n+1}}{2} h \tau,$$

откуда

$$\bar{u}_j^{n+1} = \bar{u}_j^n - \frac{\tau}{h} \left[\bar{F}_{j+1/2} - \bar{F}_{j-1/2} \right] + \frac{\bar{W}_j^n + \bar{W}_j^{n+1}}{2} \cdot \tau \quad (2.5)$$

Поскольку $\bar{u}_j^n$ (и, соответственно, $\bar{W}_j^n$) нам известны, то для нахождения неизвестной величины $\bar{u}_j^{n+1}$ нужно придумать способ расчитать потоки через боковые грани площади S - $\bar{F}_{j+1/2}$ и $\bar{F}_{j-1/2}$. Согласно (2.2), для этого нужно уметь рассчитывать на грани $(j+1/2)$ значения параметров - $\bar{p}$; $\bar{\rho}$; $\bar{u}_i$, p_k^{turb} , а также значения их молекулярных и турбулентных потоков.

По-видимому, оптимальным подходом к приближенному вычислению значений параметров $\bar{p}$; $\bar{\rho}$; $\bar{u}_i$, p_k^{turb} на грани $(j+1/2)$ является подход, предложенный С.К.Годуновым. Простейшая из версий этого подхода* выглядит следующим образом. Будем считать, что в момент времени $t = t_n$ в пределах каждой ячейки параметры течения постоянны; например, в пределах j -й ячейки $([x_{j-1/2}; x_{j+1/2}])$ $\bar{u}(x) \equiv \bar{u}_j^n$. Тогда на грани $(j+1/2)$ в момент времени $t = t_n$ имеем разрыв между постоянным течением с параметрами $\bar{u}_j^n$ и постоянным течением с параметрами $\bar{u}_{j+1}^n$. При $t > t_n$ Этот разрыв перестанет существовать; *точное* решение этой газодинамической задачи гласит, что разрыв распадается на три волны; крайние волны – это скачки уплотнения или волны разрежения, а посередине между ними всегда есть *контактный разрыв*, который

* Эта версия, предполагающая постоянство параметров в пределах ячейки, приводит к схеме первого порядка аппроксимации. Для повышения порядка аппроксимации до второго нужно предположить, что параметры распределены в пределах ячейки линейно.

отделяет газ, изначально находившийся слева от разрыва, от газа, который изначально находился справа от разрыва. Параметры газа $\bar{p}; \bar{\rho}; \bar{u}_i$ между волнами можно рассчитать, расписывая интегральные законы сохранения для каждой волны. Определив, между какими волнами оказывается грань $(j+1/2)$, мы припишем этой грани значения параметров между этими волнами, которые находятся из точного решения задачи о распаде разрыва. Таким образом, параметры $\bar{p}; \bar{\rho}; \bar{u}_i$ на грани $(j+1/2)$ определены.

Достоинством гудуновского подхода является то, что для нахождения параметров на грани используется точное решение газодинамической задачи, что обеспечивает правильный учет направления распространения информации по пространству.

Мы нашли на грани $(j+1/2)$ параметры $\bar{p}; \bar{\rho}; \bar{u}_i$; но как рассчитать параметры турбулентности p_k^{turb} ? Можно показать, что в *любой* гудуновоподобной схеме решение задачи о распаде разрыва берется при $t \rightarrow t_n + 0$ (при больших t эту задачу можно решить лишь приближенно). Таким образом, после распада разрыва проходит очень малое время. Поскольку турбулентность не сразу реагирует на изменение параметров среднего течения, в с некоторой задержкой, то можно считать, что при $t \rightarrow t_n + 0$ параметры турбулентности, проходя через крайние волны распада разрыва, не успевают измениться. Поэтому, если грань $(j+1/2)$ оказывается слева от контактно разрыва, то приписываем ей

$(p_k^{turb})_{j+1/2} = (p_k^{turb})_j^n$; если же она оказывается справа от контактного разрыва, то берем $(p_k^{turb})_{j+1/2} = (p_k^{turb})_{j+1}^n$.

Теперь нужно рассчитать молекулярные и турбулентные потоки на грани $(j+1/2)$. Для простоты будем пока работать в рамках буссинескова подхода. В этом случае, например, сумма молекулярного и турбулентного потоков импульса даются формулой

$$\bar{\rho} \tilde{R}_{ik} + \tau_{ik} \approx \frac{2}{3} \bar{\rho} \tilde{k} \cdot \delta_{ik} - (\mu + \mu_t) \cdot \left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \cdot \delta_{ik} \right] \quad (2.6)$$

Зная параметры $\bar{p}; \bar{\rho}; \tilde{u}_i, p_k^{turb}$ на грани $(j+1/2)$, мы можем рассчитать на этой грани величины $\frac{2}{3} \bar{\rho} \tilde{k}$ и $(\mu + \mu_t)$. Нужно еще придумать способ вычисления производных $\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k}$.

Молекулярные и турбулентные потоки описывают процессы диффузионного переноса, при котором информация распространяется вверх, и вниз по потоку. Чтобы учесть это, нужно, чтобы аппроксимация производной $\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x}$ содержала и параметры в ячейках, расположенных вверх по потоку от грани $(j+1/2)$, и параметры в ячейках, расположенных вниз по потоку от этой грани. Простейшая аппроксимация, которая обладает этим свойством – центрально-разностная аппроксимация, при которой производная в центре отрезка $[x_j; x_{j+1}]$ вычисляется по значениям на краях этого отрезка:

$$\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} \right)_{j+1/2} \approx \frac{(\tilde{u}_i)_{j+1}^n - (\tilde{u}_i)_j^n}{h} \quad (2.7)$$

Таким образом, мы научились вычислять все компоненты потоков $\vec{F}_{j+1/2}$ (см.(2.2)), и, следовательно, в уравнении (2.5) нам остались неизвестными только параметры в центре данной ячейки на следующем временном слое - $\tilde{u}_j^{n+1}$.

Поскольку $\vec{W}_j^{n+1} = f(\tilde{u}_j^{n+1})$, то уравнение (2.5) представляет собой нелинейное уравнение для нахождения неизвестной величины $\tilde{u}_j^{n+1}$.

Решим его приближенно. Представим

$$\vec{W}_j^{n+1} = \vec{W}_j^n + \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{u}} \right)_j^n \cdot (\vec{u}_j^{n+1} - \vec{u}_j^n) + O(\vec{u}_j^{n+1} - \vec{u}_j^n)$$

Поскольку $\vec{u}_j^{n+1} - \vec{u}_j^n = \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right)_j \cdot \tau + O(\tau^2)$, то $O(\vec{u}_j^{n+1} - \vec{u}_j^n) = O(\tau)$. Получаем (см.

(2.5)):

$$\frac{\vec{W}_j^n + \vec{W}_j^{n+1}}{2} \cdot \tau = \left[\vec{W}_j^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{u}} \right)_j^n \cdot (\vec{u}_j^{n+1} - \vec{u}_j^n) \right] \cdot \tau + O(\tau^2)$$

Пренебрежем членом $O(\tau^2)$ (это гарантирует второй порядок аппроксимации по времени). Тогда (2.5) приобретает вид:

$$\left[E - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{u}} \right)_j^n \right] \cdot (\vec{u}_j^{n+1} - \vec{u}_j^n) = -\frac{\tau}{h} \cdot [\vec{F}_{j+1/2} - \vec{F}_{j-1/2}] + \vec{W}_j^n \cdot \tau$$

откуда мы, наконец, находим параметры на временном слое $(n+1)$:

$$\vec{u}_j^{n+1} = \vec{u}_j^n + \tau \cdot \left[E - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{u}} \right)_j^n \right]^{-1} \cdot \left[\vec{W}_j^n - \frac{\vec{F}_{j+1/2} - \vec{F}_{j-1/2}}{h} \right] \quad (2.8)$$

Как видите, для вычислений по формуле (2.8) необходимо обратить

матрицу $\left[E - \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{u}} \right)_j^n \right]$, которая имеет размерность $N_{turb} \times N_{turb}$.

Итак, зная параметры течения в центрах ячеек на слое n , мы по формуле (2.8) найдем параметры в центрах ячеек на следующем временном слое.

Двигаясь от одного временного слоя к другому, мы сможем проследить за эволюцией течения во времени и пространстве.

Устойчивость построенной схемы.

Ключевая проблема численного моделирования – проблема *устойчивости* численного метода. Известно, что при нарушении определенных условий численный метод может стать неустойчивым, что проявляется в появлении физически невозможных значений параметров течения и даже

к «развалу» вычислений, при котором появляются бессмысленно большие по модулю значения параметров. Разберемся с условиями устойчивости построенной нами схемы.

Первый возможный источник неустойчивости – аппроксимация потоков $\vec{F}_{j+1/2}$, которые описывают конвективный, молекулярный и турбулентный перенос параметров газа по пространству. Условием устойчивости схемы для описания таких физических процессов является *принцип Куранта-Фридрихса-Леви*, который в несколько упрощенном виде можно сформулировать следующим образом: *за один шаг по времени (τ) информация должна проходить по пространству расстояние не большее, чем шаг сетки h .*

Но за счет конвекции (движение газа, как сплошной среды) информация проходит за время τ расстояние, не большее, чем $(V+a)\tau$, где V – модуль средней скорости газа, a – средняя скорость звука.*

Что касается диффузии, то можно показать, что за время τ она переносит информацию на расстояние, которое близко к $2\sqrt{D\tau}$, где D – наибольший из всех коэффициентов диффузии, встречающихся в нашей задаче

$$(D = \max_f \left\{ \frac{\mu}{Pr_{осн}^f} + \frac{\mu_t}{Pr_{турб}^f} \right\}, \text{ где } Pr^f - \text{число Прандтля для параметра } f).$$

Тогда условие Куранта-Фридрихса-Леви можно сформулировать следующим образом:

$$(V + a) \cdot \tau + 2\sqrt{D\tau} \leq h.$$

* Поскольку скачки уплотнения движутся быстрее звука, то они способны переносить информацию с еще большей скоростью. Поэтому более точная оценка скорости распространения информации – $(S+a)$, где S – максимальное по модулю значение скорости волны в задаче о распаде разрыва.

Решив неравенство (2.9), найдем предельное значение шага по времени τ , при котором схема все еще является устойчивой.

В дифференциальных моделях турбулентности возникает дополнительное условие устойчивости, связанное с источниковыми членами.

Давайте выбросим из системы (2.1) пространственные потоки и представим

$$\vec{W} \approx \vec{W}_j^n + \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{u}} \right)_j^n \cdot (\vec{u}(t) - \vec{u}_j^n). \text{ Тогда система (2.1) превратиться в}$$

следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{W}_j^n + \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{u}} \right)_j^n \cdot (\vec{u}(t) - \vec{u}_j^n)$$

$$\text{Сделав замену } \vec{p}(t) = \vec{u}(t) - \vec{u}_j^n + \left[\left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{u}} \right)_j^n \right]^{-1} \cdot \vec{W}_j^n = \vec{u}(t) + const, \text{ получим}$$

модельную систему уравнений:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = R \cdot \vec{p}, \quad R = const, \quad (2.10)$$

$$\text{где матрица } R = \left(\frac{\partial \vec{W}}{\partial \vec{u}} \right)_j^n.$$

Точное решение системы (2.10) имеет вид:

$$\vec{p}(t) = \sum_i \vec{e}_i z_{i0} e^{\lambda_i t}, \quad (2.11)$$

где λ_i - i -е собственное число матрицы R , $\vec{e}_i$ - соответствующий собственный вектор матрицы R , а z_{i0} - соответствующая компонента вектора $\vec{z}_0$:

$$\vec{z}_0 = T^{-1} \vec{p}(0),$$

где T – матрица, столбцами которой являются собственные вектора матрицы R . Если $\lambda_i < 0$, то соответствующая мода решения (2.11) затухает. Если $\lambda_i > 0$, то соответствующая мода решения растет.

Теперь рассмотрим численное решение. Наша аппроксимация системы (2.10) имеет вид:

$$\frac{\bar{p}^{n+1} - \bar{p}^n}{\tau} = R \cdot \frac{\bar{p}^n + \bar{p}^{n+1}}{2} \quad (2.12)$$

Решение этой системы разностных уравнений таково:

$$\bar{p}^n \equiv \bar{p}(t_n) = \sum_i \bar{e}_i z_{i0} q_i^n \quad (2.13)$$

где $q_i^n = \left[\frac{1 + \frac{\tau}{2} \lambda_i}{1 - \frac{\tau}{2} \lambda_i} \right]^n$ (это возведение в степень n , а не значение на слое n) –

аппроксимация экспоненты $e^{\lambda_i t}$. При $\tau \rightarrow 0$ (2.13) переходит в (2.11). Но мы работаем с конечными шагами по времени. В этом случае возможно $q < 0$, и тогда мода численного решения будет вести себя нефизично (т.е. не так, как соответствующая мода точного решения - $e^{\lambda_i t}$): она будет менять знак на каждом шаге по времени (моды точного решения положительны). Если, кроме того, $q < -1$, то эта мода, осциллируя, будет еще и расти до бесконечности. Это и есть *неустойчивость* численной схемы.

Далее необходимо рассмотреть два случая.

Случай 1: все $\lambda_i < 0$, т.е. все моды **точного** решения затухают. Тогда основную роль играют моды, соответствующие собственным числам $\lambda_i \in (10\lambda_{\min}, \lambda_{\min})$, где $\lambda_{\min}$ - наименьшее по модулю отрицательное собственное число. Попробуем, чтобы соответствующие моды численного решения удовлетворяли условиям:

1) основные моды ($\lambda_i \in (10\lambda_{\min}, \lambda_{\min})$) должны быть положительны (так

же, как соответствующие моды точного решения - $e^{\lambda_i t}$) и должны затухать, т.е.

$$0 < \frac{1 + \frac{\tau}{2} \lambda_i}{1 - \frac{\tau}{2} \lambda_i} < 1; \quad (2.14)$$

2) несущественные моды ($\lambda_i \leq 10\lambda_{\min}$) должны затухать, но мы можем позволить себе описывать их некорректным образом, т.е. можем разрешить им менять знак во времени. (Они все равно очень быстро затухают). Поэтому потребуем для них лишь следующее:

$$-1 < \frac{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_i}{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_i} < 1. \quad (2.15)$$

Легко убедиться, что при $\lambda_i < 0$ условие (2.15) выполняется всегда, а условие (2.14) приводит к ограничению на шаг по времени:

$$\tau \leq \frac{2}{|10\lambda_{\min}|} = \frac{1}{|5\lambda_{\min}|}. \quad (2.16)$$

Случай 2: есть $\lambda_i \geq 0$ (есть незатухающие моды). Тогда затухающие моды не столь важны, и достаточно потребовать, чтобы они только затухали; а для незатухающих мод требуем положительности и незатухания. Имеем:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_i < 0 \Rightarrow -1 < \frac{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_i}{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_i} < 1, \\ \lambda_i \geq 0 \Rightarrow \frac{1 + \frac{\tau}{2}\lambda_i}{1 - \frac{\tau}{2}\lambda_i} \geq 1. \end{array} \right.$$

Эта система удовлетворяется при

$$\tau < \frac{2}{\max_i \lambda_i^+}, \quad (2.17)$$

где λ_i^+ - положительные собственные числа матрицы R .

Для повышения качества описания самой быстрорастущей моды требуем

$$\tau < \frac{1}{5 \max_i \lambda_i^+}. \quad (2.18)$$

В зависимости от ситуации (случай 1 или случай 2) нужно использовать либо условие (2.16), либо условие (2.18).

Граничные условия.

Напоследок кратко опишем принципы задания граничных условий для дифференциальных моделей турбулентности. Проблема состоит в следующем: для расчета необходимо знать значения параметров турбулентности на границах расчетной области. Откуда эти значения взять?

Вот несколько полезных рецептов:

Существует три основные типа границ:

- 1) граница, через которую поток втекает внутрь расчетной области. В этом случае нежно приписать значения параметра турбулентности во втекающем потоке. Информация о втекающем потоке должна быть задана при постановке задачи. Очень часто эта информация приходит из эксперимента. В эксперименте чаще всего измеряются пульсации полного или статического давления. А нам нужно задать $\tilde{k} = \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2}$. Как связать пульсации давления и пульсации скорости? Возможный путь использование «сильной аналогии Рейнольдса», согласно которой пульсации полной энергии потока равны нулю. Если эта гипотеза верна и если мы пренебрегаем пульсациями плотности, то получается

соотношение $\bar{\rho} \frac{\overline{u_i' u_i'}}{2} + \overline{p'} = 0$, откуда $\overline{p'^2} = \bar{\rho}^2 \frac{\overline{u_i' u_i' u_k' u_k'}}{4}$. Согласно

гипотезе Миллионщикова, $\frac{\overline{u_i' u_i' u_k' u_k'}}{4} \approx \frac{(\overline{u_i' u_i'})^2}{4} = \bar{k}^2$; следовательно,

$$\bar{k} \approx \frac{1}{\bar{\rho}} \sqrt{\overline{p'^2}}.$$

Далее, от куда взять ε ? Если в эксперименте измерялся спектр турбулентных пульсаций, то вам известна характерная частота

турбулентности f . Но $\omega = \frac{\varepsilon}{\bar{k}} = C \cdot f$. Коэффициент C нужно определять из сравнения расчета и эксперимента; в качестве начального приближения можно взять $C = 1$.

Если спектр неизвестен, но известно, что турбулентность очень слабая, то можно задать $\mu_t = \mu_{\text{лам}}$, после чего ε можно извлечь из формулы

$$\text{Прандтля-Колмогорова } \mu_t = 0.009 \bar{\rho} \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon}.$$

Наконец, если мы ведем расчет по небуссинесковской модели, то нужно задать значения напряжений Рейнольдса на границе. Но на границе как раз можно вернуться обратно к Буссинеску и вычислять

$$\bar{\rho} \tilde{R}_{ik} \approx \frac{2}{3} \bar{\rho} \tilde{k} \cdot \delta_{ik} - \mu_t \cdot \left[\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \tilde{u}_m}{\partial x_m} \cdot \delta_{ik} \right]. \text{ А как считать } \bar{k} \text{ и}$$

$$\mu_t = 0.09 \bar{\rho} \frac{\bar{k}^2}{\varepsilon}, \text{ уже обсуждалось.}$$

- 2) *граница, через которую поток вытекает из расчетной области.* В этом случае значения параметров турбулентности просто линейно экстраполируются на границу по получающимся в ходе расчета параметрам турбулентности внутри расчетной области.
- 3) *твердая поверхность с прилипанием газа.* В этом случае задаем $\bar{k} = 0$, $\varepsilon = 0$ (на стенке, где скорость газа равна нулю, турбулентность, естественно, отсутствует), а для $\omega = \varepsilon / \bar{k}$ рекомендуется использовать соотношение $\frac{\partial \omega}{\partial n} = 0$.

V. Описание расчетной сетки.

Сетка строилась в программе – сетка построителе. Современной мощности компьютеров не хватает, чтобы построить всю трехмерную расчетную область, поэтому для расчета, построили только один сектор. Это возможно сделать, т.к. сопло симметрично относительно оси.

Размеры сетки:

длина области – 2м

диаметр области – 2м

угол раскрытия сектора - 45°

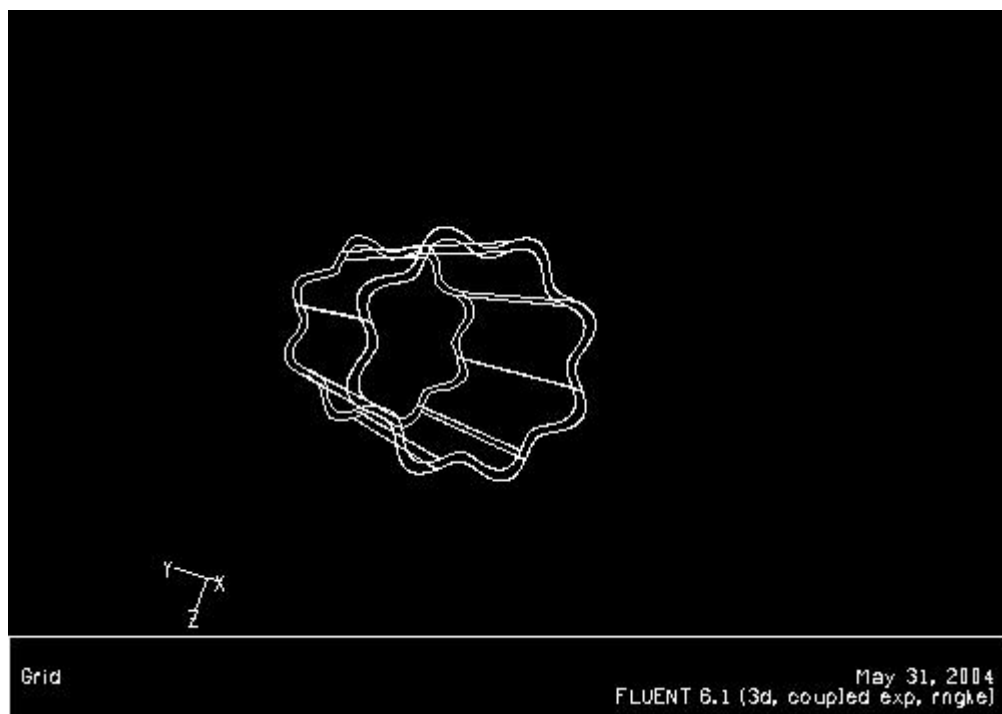
длина сопла – 5 см [0.05м]

диаметр сопла – 2 см [0.02м]

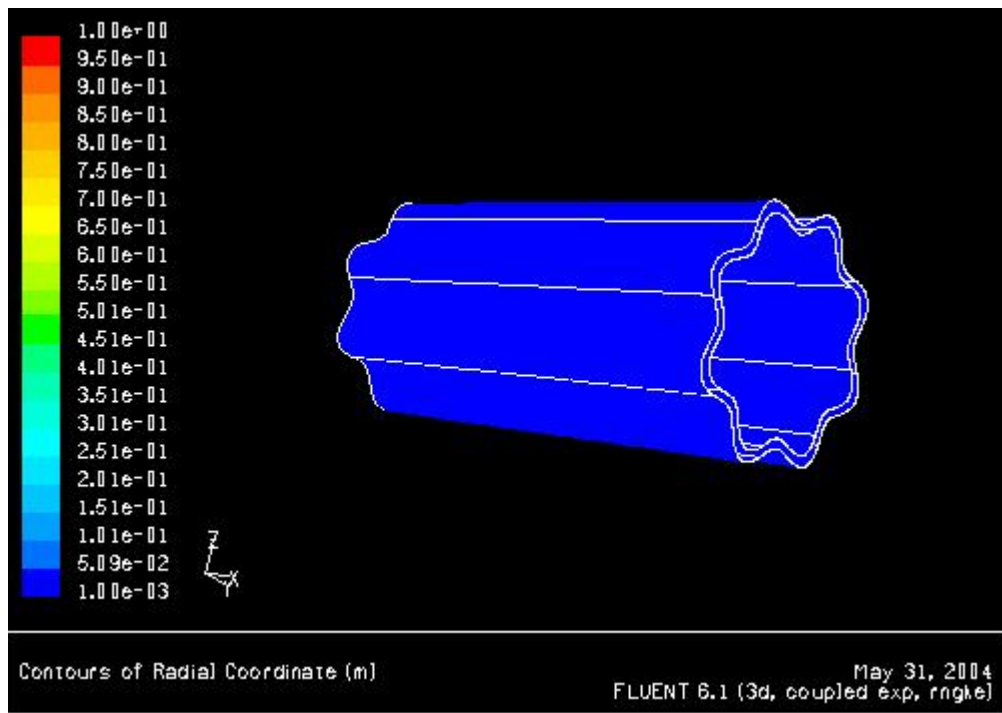
8 гофров, коэффициент гофрировки – 0.1

количество ячеек сектора – $1.053.802 (>10^6)$

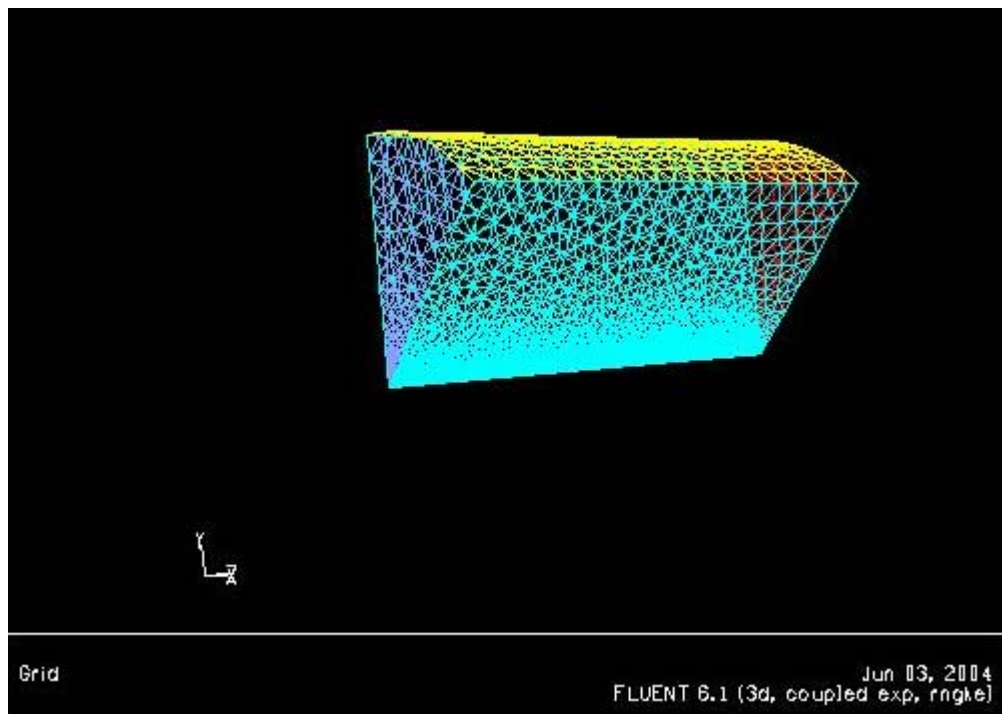
Вся область покрывается 8 секторами $\sim 1.3 \cdot 10^6$ ячеек.



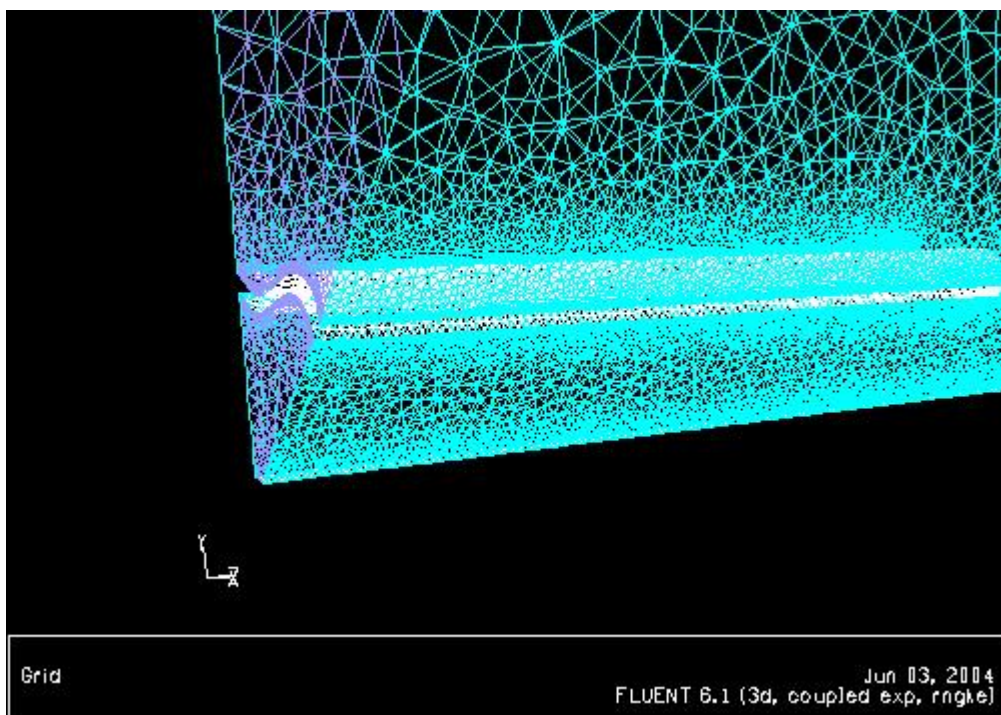
Сопло. Коэффициент гофрировки – 0.1. Диаметр 1см.
Продольные линии обозначают место «сшивки» секторов.



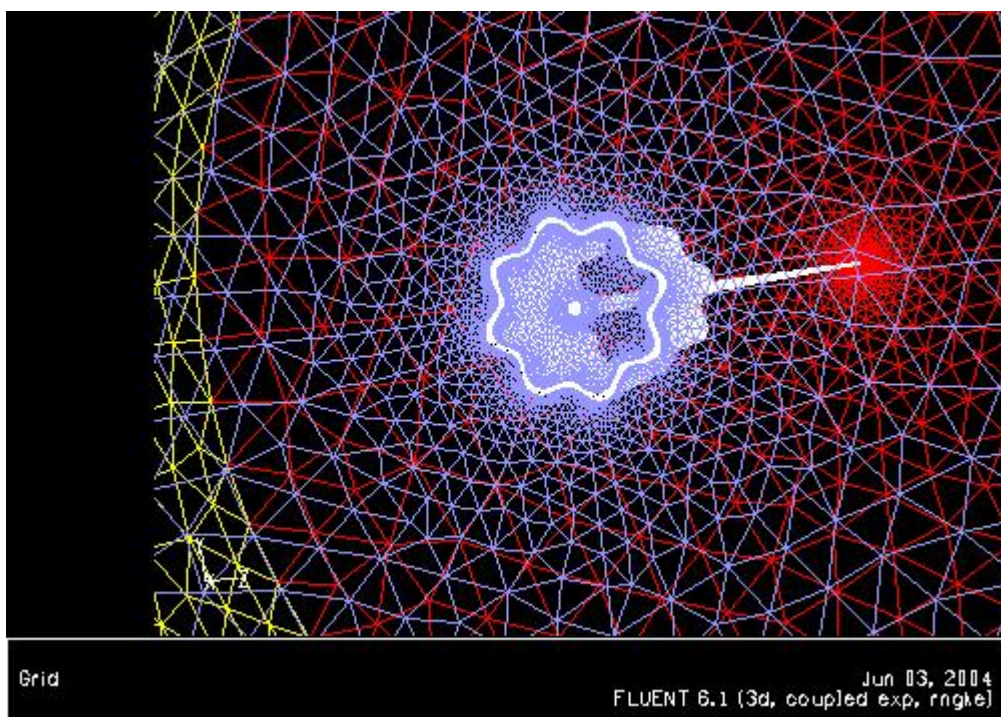
Сопло, с натянутой плоскостью. Длина 5см.



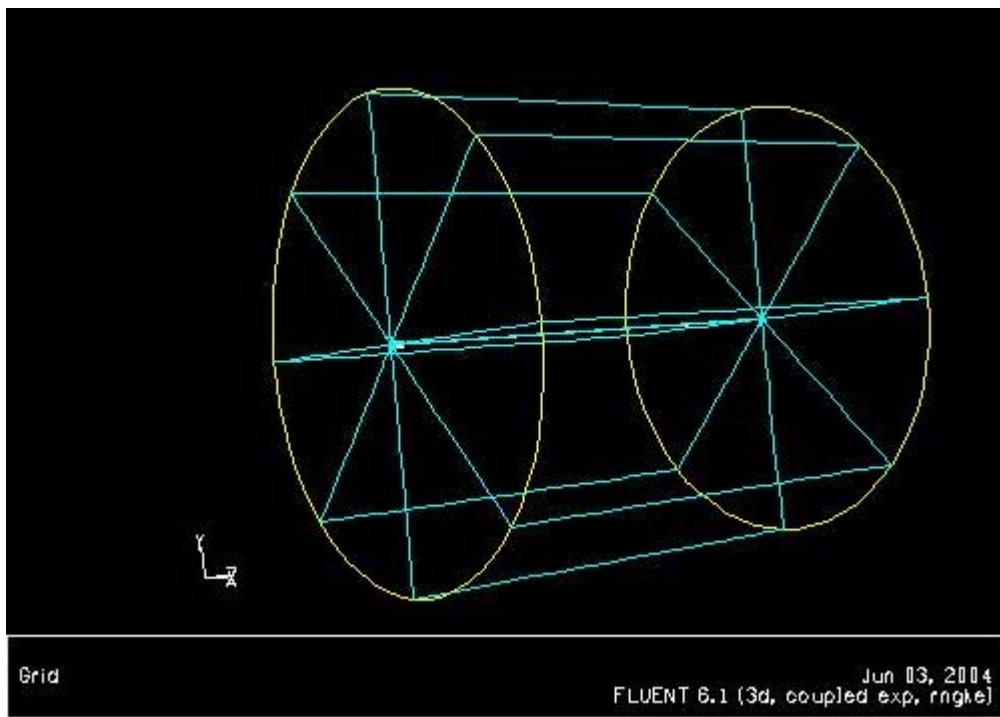
Сектор, общий план. Ячейки прорисованы только на ограничивающих плоскостях.



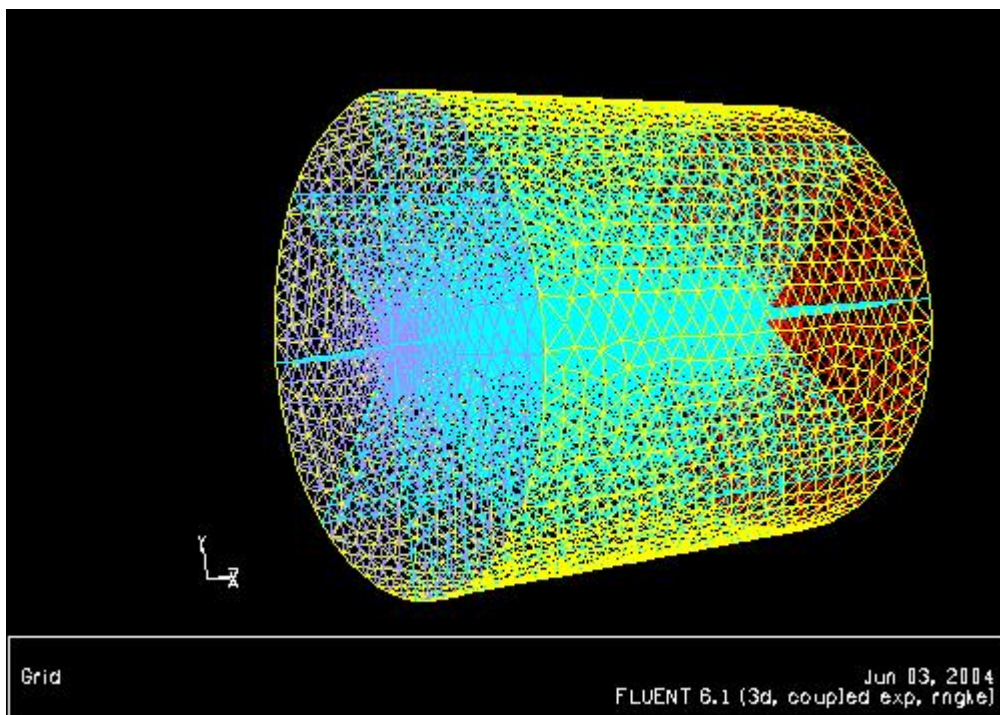
Часть сопла с гофрировкой.



Все сопло, передняя и задняя границы области. Здесь отлично видно сгущение сетки в предполагаемом пограничном слое. Ось симметрии «вырезана», для того чтобы избежать дублирования параметров на границе ячеек.



Расчетная область: сопло, плоскости периодичности, границы области.



Тоже самое, с прорисовкой ячеистой структуры на плоскостях.

Нарисовать всю структуру сетки возможно, но занимает много времени (~ часа) и картинка получается абсолютно не наглядной.

VI. Постановка задачи.

Моделируется стационарное решение об истечении сверхзвуковой холодной струи в затопленное пространство. Устанавливаются следующие граничные условия:

На входе – давление 8 атм.

температура 300 К

интенсивность турбулентности 1%

На выходе – давление 1 атм.

температура 300 К

интенсивность турбулентности 10%

На стенках сопла устанавливаются условия непротекания. Сопло покоится. Турбулентность моделировалась при помощи $k - \varepsilon$ модели, модификации RNG.

Расчет длился около 3х недель. В процессе расчета несколько раз менялись методы, определяющие последовательность решения основных уравнений. (Segregated, Coupled см.). О сходимости решения можно было судить по поведению «остатков» параметров уравнений. Они выводились на экран в виде графиков. Решение считается установившимся, когда графики выходят на «полочки». Кроме того, приостановив расчет, можно вывести на экран любые параметры струи и оценить, насколько картинка близка к действительности.

VII. Результаты

Динамическое давление в средней плоскости сектора.

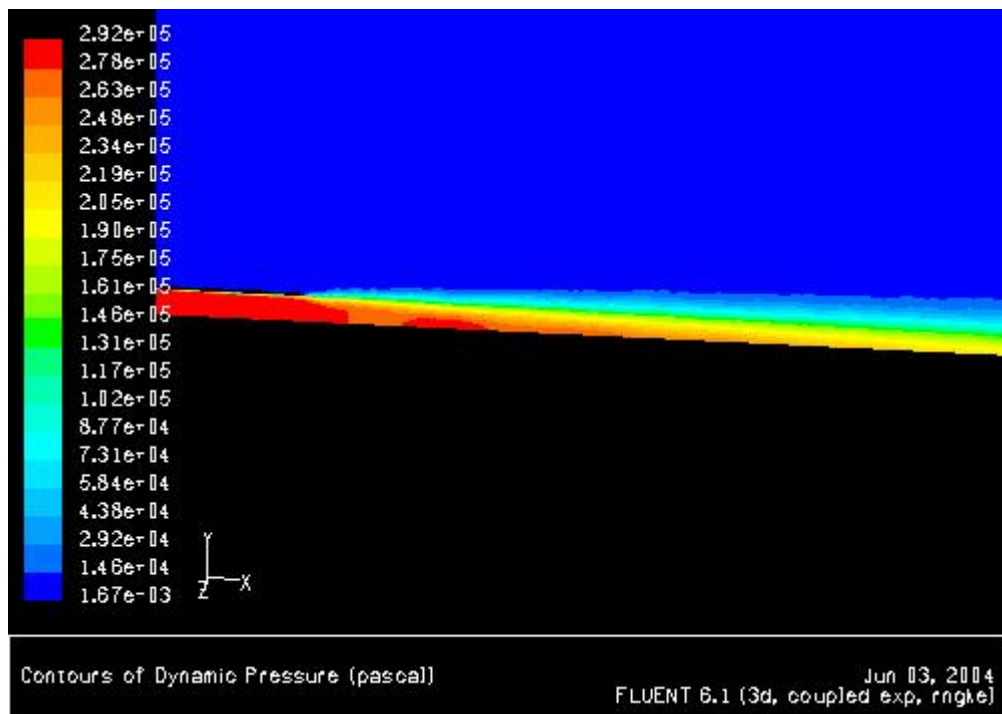
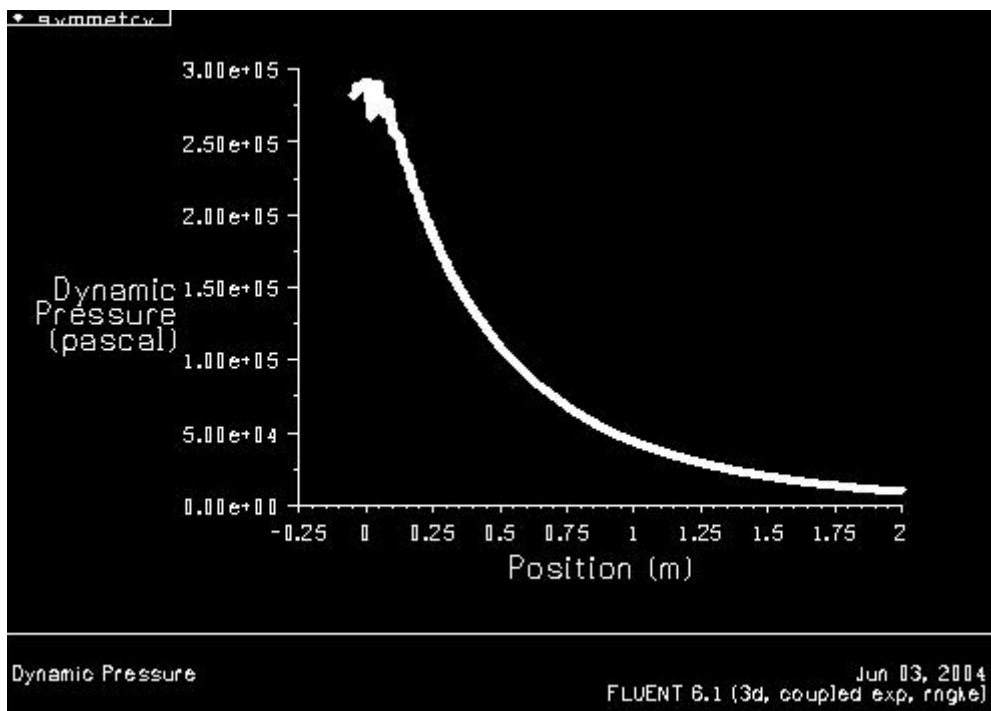


График изменения динамического давления на оси.



Распределение скорости в средней плоскости сектора.

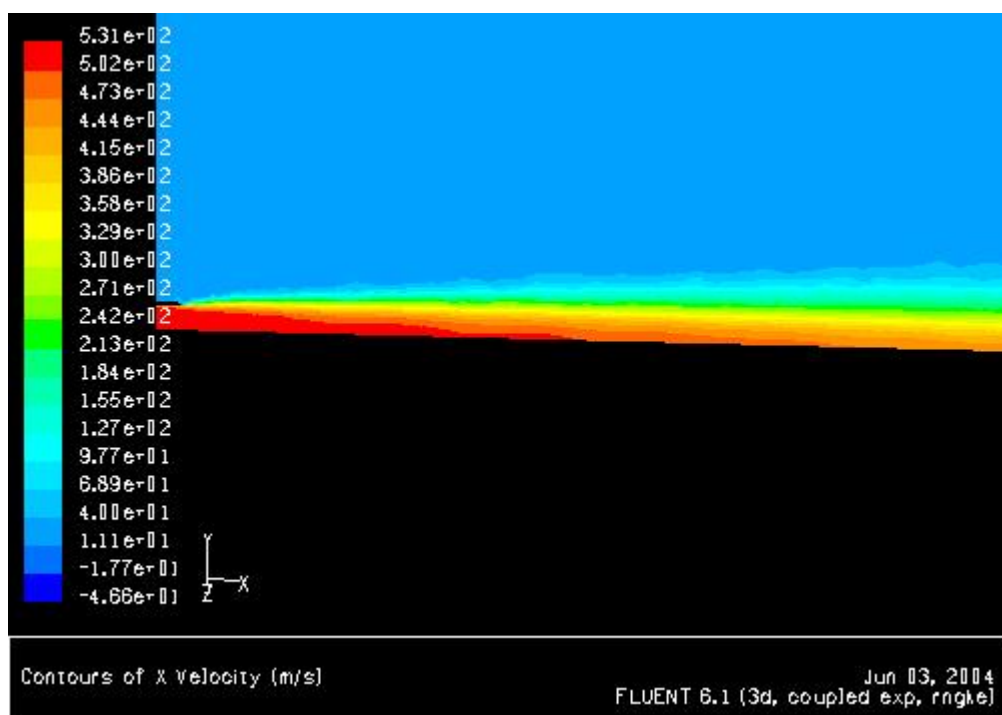
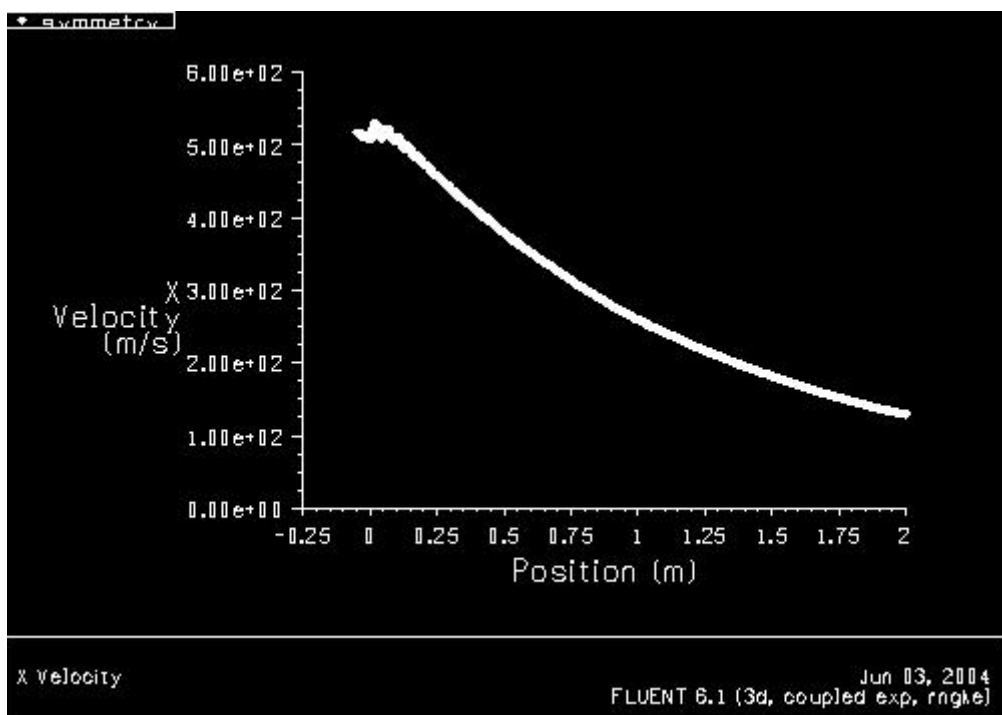


График изменения компоненты скорости V_x вдоль оси.



Бочки в начальном участке струи.

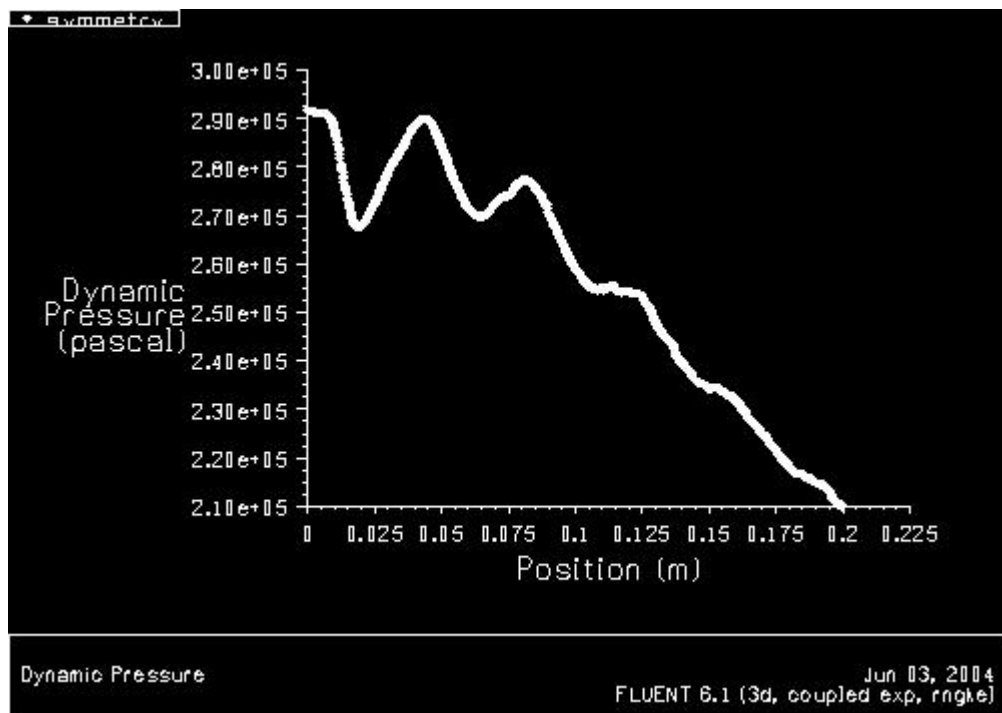


График изменения динамического давления на оси струи.

Отчетливо видны флуктуации давления на расстоянии одного калибра от кромки сопла.

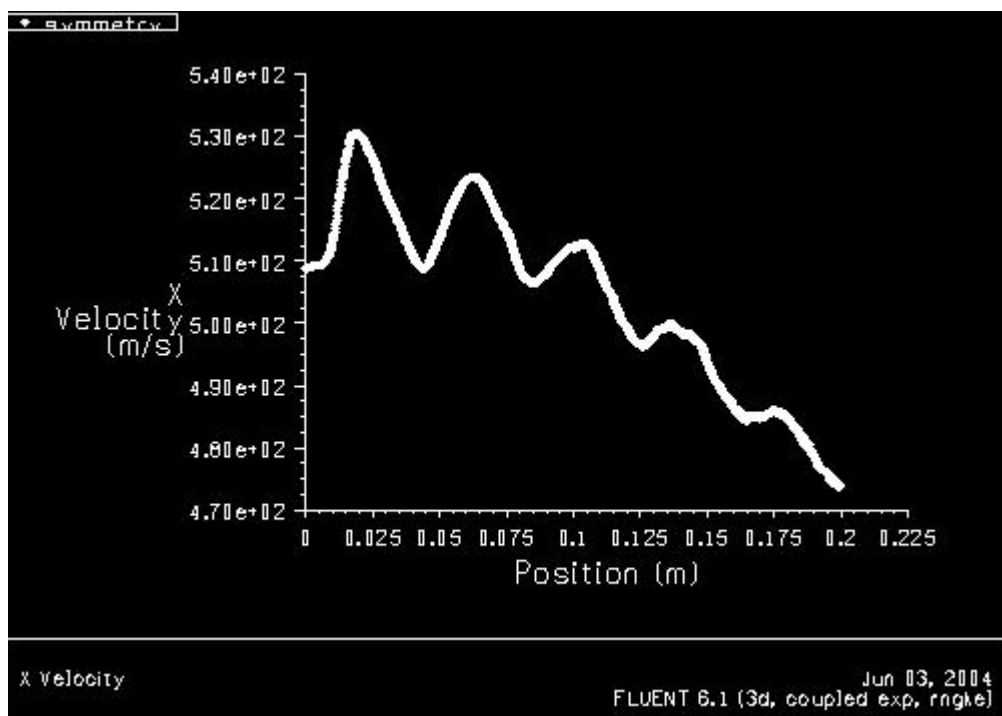


График изменения V_x компоненты скорости. Аналогичная картина флуктуаций скорости на оси на расстоянии одного калибра от кромки сопла.

Оценка размывания гофрировки вниз по потоку.

Для того, чтобы оценить скорость размывания гофров, введем такой

параметр: $\frac{V_{x \min}}{V_{x \max}}$. Где минимальное и максимальное значение x-компоненты

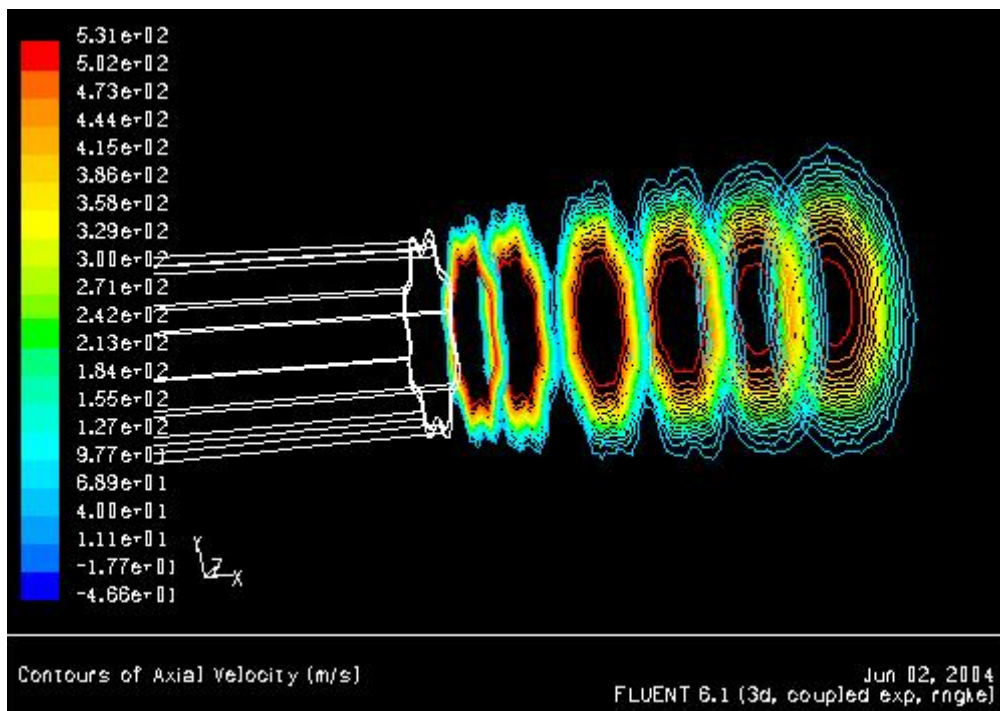
скорости измеряется на цилиндрической поверхности $d = 2\text{см}$ в

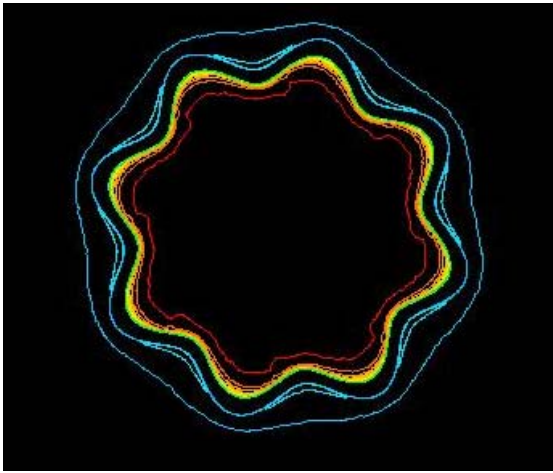
перпендикулярных сечениях струи. Можно построить график изменения

параметра $\frac{V_{x \min}}{V_{x \max}}$ от расстояния в калибрах.

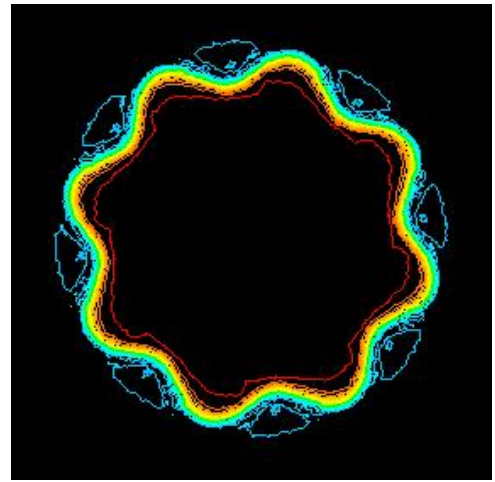


Наглядно это выглядит следующим образом:

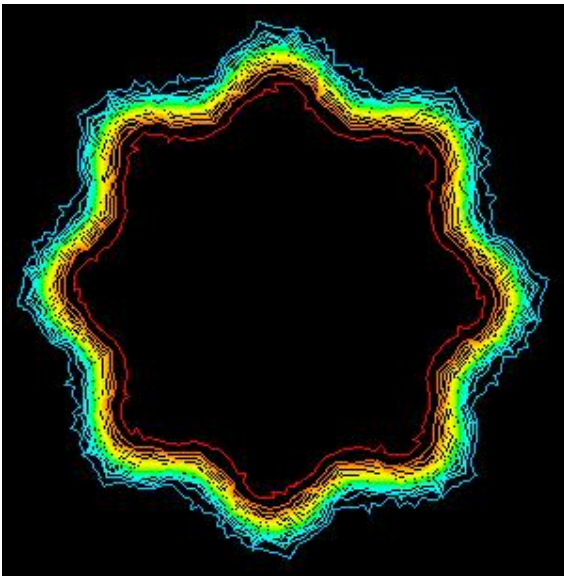




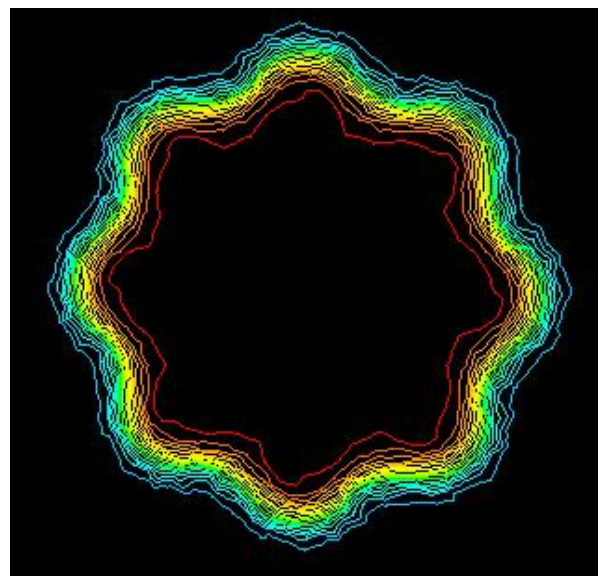
$x/d = 0$



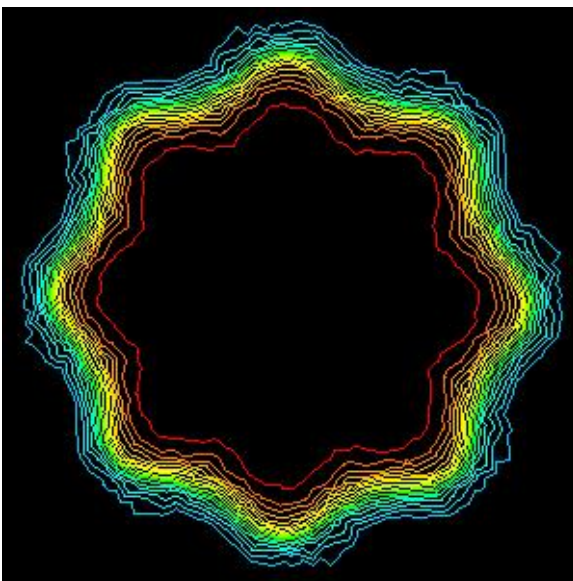
$x/d = 0.05$



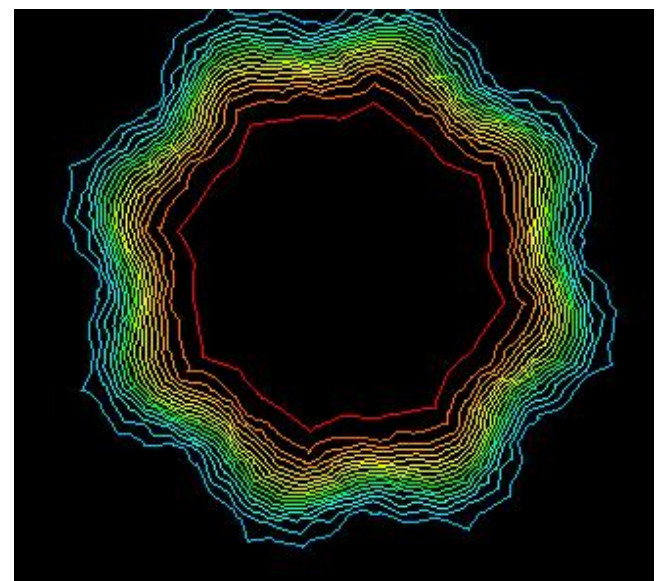
$x/d = 0.1$



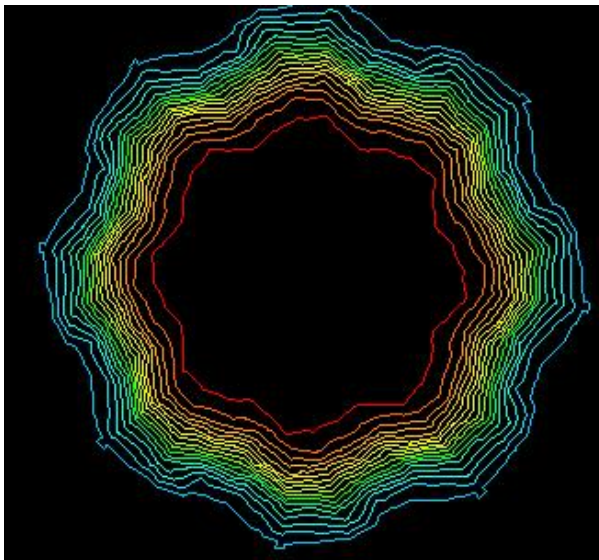
$x/d = 0.15$



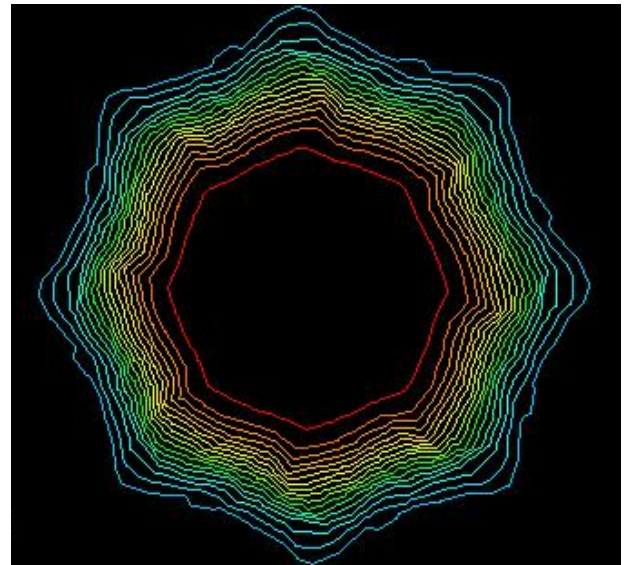
$x/d = 0.2$



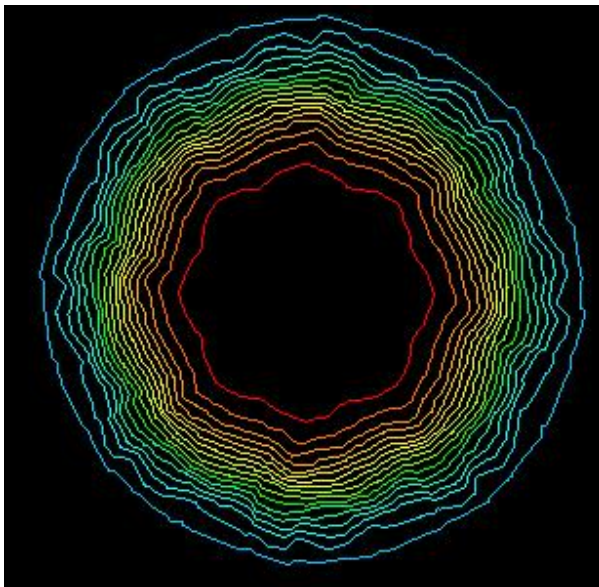
$x/d = 0.4$



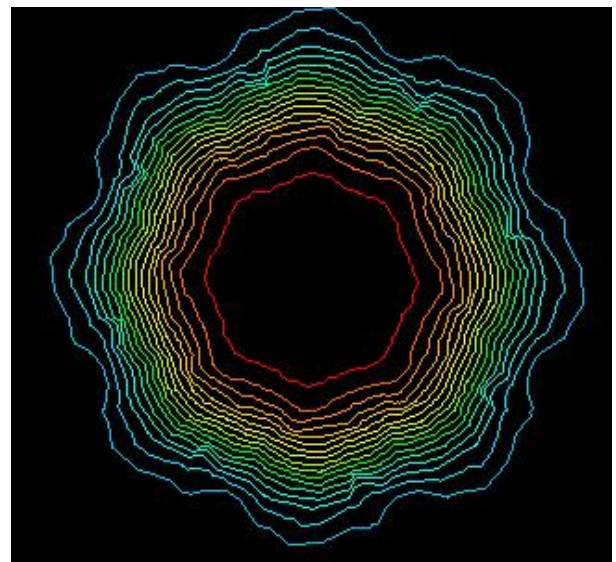
$x/d = 0.5$



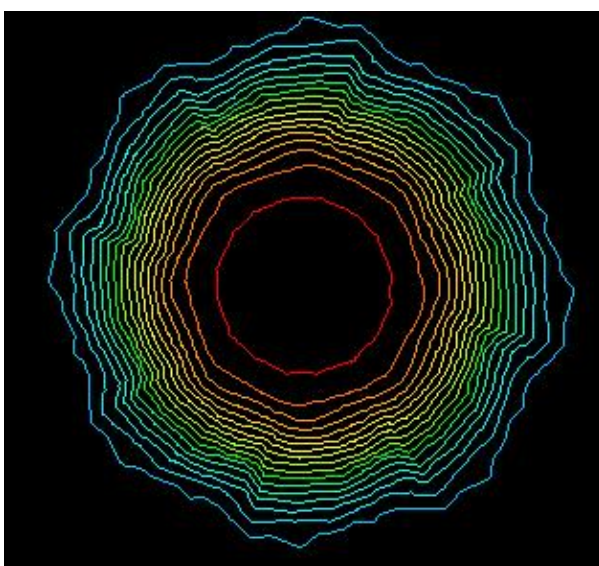
$x/d = 0.75$



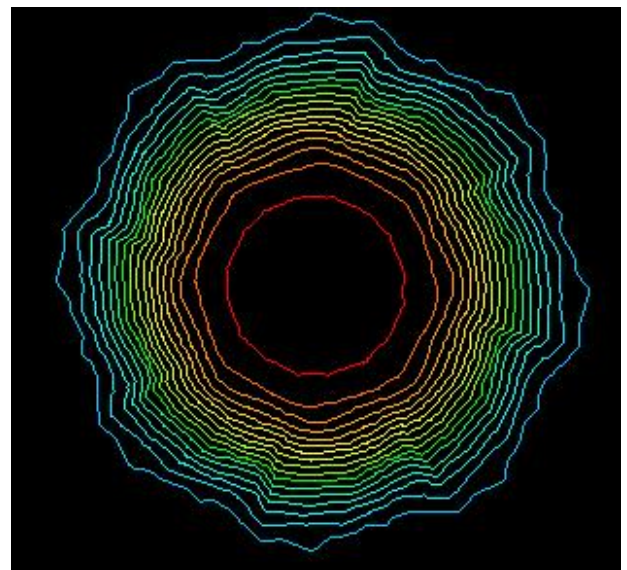
$x/d = 1$



$x/d = 1.5$

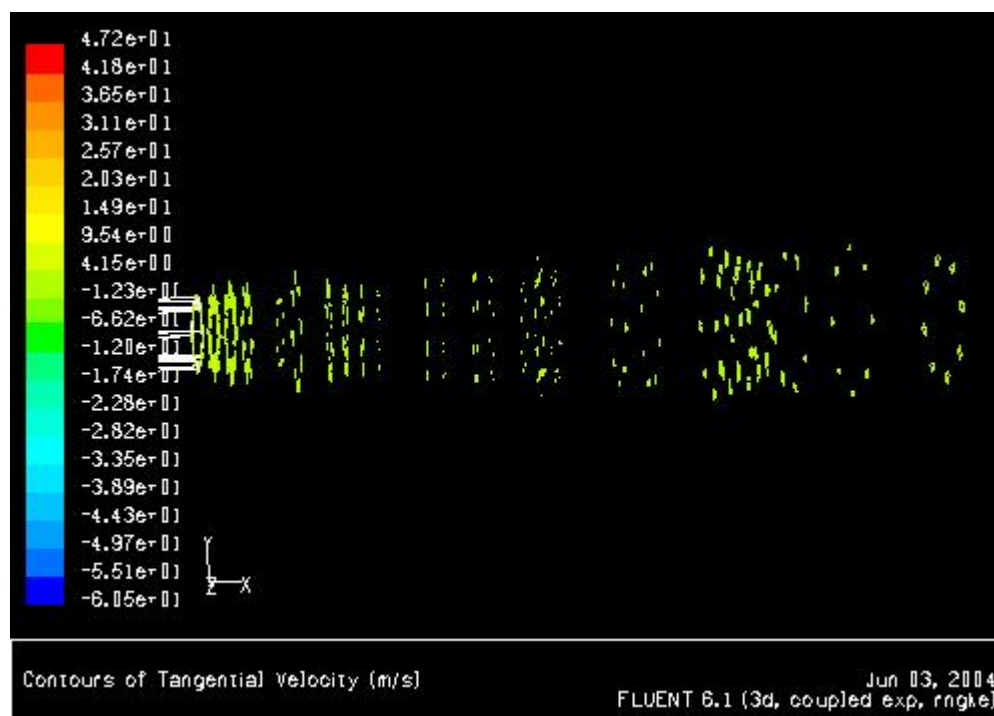


$x/d = 1.75$



$x/d = 2$

Интересно проследить изменение тангенциальной компоненты скорости вниз по потоку.



На картинке прослеживается периодическая структура. Первый минимум достигается в $x/d = 1.75$ (0.035 м).

VIII. Выводы и результаты.

1. Построена геометрия гофрированного сопла для сверхзвукового потока.
2. Построена расчетная сетка, для численного метода решения задачи. Вся сетка составляет порядка $8.3 \cdot 10^6$ ячеек. Симметричная геометрия задачи позволяет делать расчет в одном секторе ($\sim 10^6$ ячеек). Тем самым скорость расчета увеличивается на порядок.
3. Исследованы численные методы расчета сверхзвуковых струй и определена оптимальная модель турбулентности, для замыкания уравнений Рейнольдса.
4. Выполнен сложный численный расчет, длительностью более 400 часов, в ходе которого несколько раз изменялись численные схемы, определяющие порядок решения уравнений (основные уравнения и модель замыкания не изменялась). Такие меры необходимы для улучшения сходимости решения.
5. Получено стационарное решение, позволяющее получить любые средние параметры струи в каждой точке расчетной области.
6. Построены графики для осредненной компоненты скорости V_x (компонента скорости вдоль потока) и динамического давления. Численное решение выявило «бочки» в начальном участке струи, поскольку исходно рассматривался нерасчетный режим истечения струи.
7. Исследована скорость размывания гофров вниз по потоку. Установлено, что струя становится круглой уже на расстоянии 1.5 калибра от кромки сопла.
8. Результаты расчета позволяют сделать вывод о соотношении гофрированного и круглого участков сверхзвуковой струи. Показано, что решение для гофрированного участка, где отдельные моды струи могут сильно взаимодействовать друг с другом, задолго до конца

начального участка сменяется на решение для круглой струи, где отдельные азимутальные моды не взаимодействуют друг с другом.

IX. Список используемой литературы.

1. Г.Н.Абрамович. Прикладная газовая динамика, «Наука», Москва, 1969.
2. А.С.Гиневский, Е.В.Власов, Р.К.Каравосов, Физмалит, Москва, 2001.
3. D.C.Wilox. Turbulence Modeling for CFD, DCW Industries, Inc., La Canada, CA, 1998.
4. Власенко. Курс лекций «Моделирование турбулентных течений», 2001.
5. Fluent 6.0, Help.